

Rough Heston and Stochastic Local Volatility in Equity Autocallables pricing

Ayman El-Achab, Baye Matar Kandji et Adrien Misko
Nexialog Consulting, Paris, France

Résumé

Les Autocallables sont des produits structurés à remboursement anticipé, très prisés dans la gestion de portefeuille structurée. Leur nature fortement path-dependent et leur payoff complexe rendent leur valorisation difficile et nécessitent l'utilisation de modèles sophistiqués et de techniques numériques avancées (Monte Carlo, PDE). Ce papier propose une étude comparative entre les approches traditionnelles et récentes en matière de modélisation de la volatilité pour ces produits. Dans ce cadre, une attention particulière est portée aux modèles Local-Stochastic Volatility (LSV) et Rough Heston, qui incarnent respectivement les approches industrielles et les avancées académiques récentes. Les modèles LSV sont reconnus pour leur capacité à intégrer la dynamique du sous-jacent tout en assurant une calibration fidèle à la surface de volatilité implicite. Les modèles rough, quant à eux, introduisent une structure de mémoire longue et de rugosité dans la volatilité, en phase avec les observations empiriques sur les marchés. L'objectif est d'évaluer, via une calibration numérique, si les modèles de volatilité rugueuse offrent une amélioration significative de la valorisation des Autocallables par rapport aux méthodes LSV établies.

Mots-clés : Autocalls, path-dependent, Local Volatility, Stochastic Volatility, Local-Stochastic Volatility, Rough Heston, Monte Carlo.

1 Introduction

Les produits structurés sont des instruments financiers combinant un actif obligataire avec un ou plusieurs payoffs dérivés equity, permettant d'ajuster le profil rendement-risque selon les besoins de l'investisseur. Ces produits représentent une part significative du marché des dérivés equity, particulièrement dans un contexte de taux d'intérêt bas où leurs coupons élevés les rendent plus attractifs. Les Autocalls constituent une famille particulière de produits structurés intégrant une option de remboursement anticipé. Le mécanisme de rappel est activé si, à l'une des dates d'observation prédéfinies T_i , le prix du sous-jacent S_T franchit (ou atteint) un niveau de rappel L , entraînant alors le remboursement du produit et le versement d'un coupon c . Une telle structure nécessite des modèles capables de capturer fidèlement la dynamique conjointe du sous-jacent et de sa volatilité.

En une vingtaine d'années, la modélisation des autocalls a évolué vers un compromis entre exigences de calibration de la VI, fidélité des dynamiques de volatilité et contraintes numériques. Les années 2000 ont vu s'imposer les modèles locaux et stochastiques, puis leur synthèse aux modèles stochastic local volatility (LSV), qui a permis une tarification plus précise et une gestion cohérente du smile de la VI pour des exotiques complexes. Les limites de ces cadres, en particulier en régimes de volatilité extrême ou liés à des contraintes numériques de calibrations, ont cependant conduit à explorer des paradigmes alternatifs. Les modèles à volatilité rugueuse, motivés par des observations microstructurelles, constituent l'une des réponses les plus marquantes de la dernière décennie. En introduisant une mémoire longue dans la variance, ils améliorent l'ajustement de certains aspects de la surface implicite (skews courts, etc) et ouvrent des perspectives pour le pricing de produits dépendants du chemin.

Le modèle de volatilité locale (LV), introduit par Dupire [10] comme extension du cadre de Black-Scholes [6], reproduit exactement la surface de volatilité implicite (VI) observée sur le marché à un instant donné. Ce modèle constitue un standard pour la valorisation des produits dérivés equity vanille (dont le payoff ne dépend que d'une marginale du sous-jacent à une date de maturité). Cependant, son hypothèse centrale d'une volatilité déterministe dépendant du temps et du niveau du sous-jacent fige la dynamique future du smile de la VI, générant des évolutions irréalistes de la volatilité [26]. Cette limitation rend le modèle inadéquat pour valoriser des produits fortement path-dependent comme les Autocalls.

Les modèles de volatilité stochastique (SV), e.g. le modèle de Heston [22], introduisent un facteur de volatilité aléatoire pour générer une dynamique plus réaliste de la surface implicite. Ces modèles demeurent néanmoins difficiles à calibrer parfaitement : le nombre limité de paramètres restreint leur capacité à ajuster l'ensemble de la surface de volatilité implicite, particulièrement sur les maturités courtes.

Pour surmonter les limitations des approches LV et SV, les modèles de volatilité locale-stochastique (LSV) ont été développés [23], combinant les avantages de chaque classe. Un modèle LSV correctement calibré permet de valoriser des produits path-dependent de manière cohérente avec les prix de marché. Ces modèles présentent toutefois des défis numériques importants : leur calibration est complexe et requiert un grand nombre d'évaluations de prix par simulation Monte-Carlo. Ce coût computationnel élevé se retrouve également lors des simulations, rendant l'utilisation des modèles LSV significativement plus coûteuse que celle des modèles SV [8].

Plus récemment, une nouvelle classe de modèles a été introduite avec le concept de

volatilité rugueuse [17]. Ces modèles s'appuient sur l'observation empirique que la volatilité suit une dynamique plus irrégulière que celle modélisée par les processus browniens classiques, et peut être mieux décrite par des processus fractionnaires à exposant de Hurst $H < 0.5$. Le modèle Rough Heston, par exemple, conserve une structure proche du modèle de Heston tout en incorporant cette rugosité dans la dynamique de la variance. Cette approche capture plus fidèlement la structure fine de la surface de volatilité implicite, notamment sur les maturités courtes, ainsi que la persistance temporelle observée en données haute fréquence.

L'intérêt des modèles rugueux réside dans leur cohérence empirique renforcée et leur potentiel pratique : plusieurs travaux récents (voir [12] et ses références) ont proposé des méthodes de calibration efficaces rendant leur mise en œuvre envisageable en environnement opérationnel.

Dans ce contexte, la question centrale de ce travail est d'évaluer l'apport des modèles de volatilité rugueuse par rapport aux approches LSV, largement utilisées dans l'industrie pour la valorisation des Autocalls. L'étude consiste à établir un benchmark de pricing à partir d'un modèle LSV, puis à développer et calibrer un modèle Rough Heston afin de comparer leurs performances en termes de calibrage, de précision de valorisation et de coût computationnel.

La suite du papier est organisée comme suit : la section 2 présente les fondements théoriques des modèles LSV et Rough Heston. La section 3 détaille les méthodologies de calibration développées pour chaque approche. La section 4 expose les résultats obtenus et leur analyse. Enfin, la section 5 synthétise les apports de cette étude et propose des perspectives de développement.

2 Modélisation

Cette section présente les différentes classes de modèles de volatilité utilisés pour la valorisation des produits dérivés equity. L'objectif est de comprendre les limites des approches traditionnelles et de motiver l'utilisation des modèles de volatilité rugueuse.

2.1 Le modèle de Black-Scholes et ses limites

Le modèle de Black-Scholes [6] constitue le point de départ de la modélisation en finance quantitative. Le sous-jacent S_t suit la dynamique :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1)$$

où r est le taux sans risque, σ la volatilité constante et W_t un mouvement brownien.

Ce modèle fournit une formule fermée pour le prix d'un call européen :

$$C_{BS}(S_0, K, T, \sigma) = S_0 \mathcal{N}(d_+) - K e^{-rT} \mathcal{N}(d_-) \quad (2)$$

avec $d_{\pm} = \frac{\ln(S_0/K) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$.

Dès les années 1980, les cotations d'options révèlent que la volatilité implicite varie selon le strike K et la maturité T . Cette structure, appelée « smile » de volatilité, contredit l'hypothèse de volatilité constante et nécessite des modèles plus sophistiqués.

2.2 Modèles de volatilité locale

Le modèle de volatilité locale [10, 9] remplace l'hypothèse de la volatilité constante par une fonction déterministe $\sigma_{LV}(t, S)$:

$$dS_t = r S_t dt + \sigma_{LV}(t, S_t) S_t dW_t \quad (3)$$

La fonction $\sigma_{LV}(t, S)$ est déterminée par la formule de Dupire :

$$\sigma_{LV}^2(T, K) = \frac{\partial_T C(T, K) + r K \partial_K C(T, K)}{\frac{1}{2} K^2 \partial_{KK}^2 C(T, K)} \quad (4)$$

où $C(T, K)$ est le prix actualisé d'un call de strike K et maturité T .

Ce modèle déterministe présente l'avantage de calibrer exactement la surface de volatilité implicite observée à l'instant initial, reproduisant le smile de volatilité pour chaque maturité. La calibration s'effectue directement par application de la formule de Dupire sur une nappe dense de prix de calls et conserve la rapidité des diffusions unidimensionnelles.

Cependant, cet ajustement parfait s'accompagne d'un grand inconvénient. Ce modèle suppose que la structure actuelle des volatilités implicites reste figée, impliquant des dynamiques irréalistes des forward smiles. Dans un modèle LV, le smile futur est essentiellement aplati par rapport à l'état initial; la fonction déterministe $\sigma(t, S)$ tend vers une volatilité locale de long terme relativement plate pour les maturités éloignées. Si l'on reprice des options pour une date future avec le modèle, on obtient un smile quasi constant, ne reflétant pas la forte variabilité empiriquement observée des smiles dans le temps.

Cette limite devient particulièrement marquée pour les produits exotiques sensibles au smile futur, comme les options cliquet ou les autocalls comportant de nombreuses dates d'observation. Par ailleurs, un modèle de volatilité locale ne reproduit pas de manière explicite l'effet de levier (corrélation empirique négative entre rendements et volatilité, voir [11]), sauf à l'intégrer indirectement dans la surface calibrée. Il en résulte un risque de biais de valorisation pour les produits fortement path-dependent. Plus généralement, un modèle LV tend à sous-estimer le risque d'événements extrêmes, la volatilité étant figée par la calibration initiale.

2.3 Modèles de volatilité stochastique

Les modèles de volatilité stochastique introduisent un second facteur aléatoire pour faire évoluer la volatilité dans le temps, surmontant ainsi la rigidité des approches déterministes. Le modèle de Heston [22] constitue la référence de cette classe, avec la dynamique suivante :

$$\begin{aligned} dS_t &= r S_t dt + \sqrt{\nu_t} S_t dW_t^S \\ d\nu_t &= \kappa(\theta - \nu_t) dt + \xi \sqrt{\nu_t} dW_t^\nu \\ d\langle W^S, W^\nu \rangle_t &= \rho dt \end{aligned} \quad (5)$$

Les paramètres κ (vitesse de retour à la moyenne), θ (variance de long terme), ξ (volatilité de la volatilité), ρ (corrélation) et ν_0 (variance initiale) caractérisent l'évolution de la variance instantanée selon un processus de type Ornstein-Uhlenbeck avec racine carrée.

Ces modèles génèrent des dynamiques de smile plus réalistes que l'approche locale. La volatilité implicite devient une variable aléatoire évoluant avec les conditions de marché, permettant de reproduire des comportements « sticky delta » (la volatilité implicite asso-

ciée à un même delta (ou moneyness) reste pratiquement inchangée lorsque le sous-jacent se déplace, de sorte que le smile “glisse” avec le prix, voir [3]) plutôt qu’une structure rigide. La corrélation ρ capture l’effet de levier empiriquement observé, où la volatilité tend à augmenter lors des baisses de marché. En conséquence, les modèles SV évaluent mieux les produits exotiques dépendant du smile futur, générant des scénarios plausibles d’évolution de volatilité.

Le modèle de Heston appartient à la classe des processus affines, permettant une expression semi-fermée de la fonction caractéristique [22] et l’utilisation efficace de la transformée de Fourier rapide pour la calibration [7]. Cette propriété confère à ce modèle un avantage computationnel certain par rapport aux approches purement numériques.

Cependant, le modèle de Heston présente des limitations importantes dans la calibration. Avec un nombre restreint de paramètres, ils n’arrivent pas à ajuster l’ensemble de la surface implicite. Un modèle de Heston unifactoriel reproduit notamment mal la forte concavité du smile de court terme observée sur les maturités très courtes. La raison fondamentale réside dans le fait que ces modèles markoviens classiques imposent une structure à terme du skew ATM constante pour les petites valeurs de T (maturité). Cette caractéristique les empêche de reproduire la pente abrupte (bien approximée par une loi de puissance, T^α $\alpha < 0$) du smile observée empiriquement lorsque la maturité tend vers zéro, voir [17].

Pour améliorer l’ajustement, diverses extensions ont été développées, notamment les modèles SV avec sauts (modèle de Bates) ou multi-facteurs, ajoutant de la flexibilité au smile court terme. Malgré ces améliorations, calibrer précisément un modèle SV sur l’ensemble des maturités et strikes reste difficile. Une limitation supplémentaire des modèles SV purement markoviens est leur incapacité à reproduire exactement tous les prix vanille : il subsiste toujours une erreur résiduelle de calibration, ce qui peut s’avérer problématique pour la couverture des produits exotiques qui requièrent généralement un modèle reproduisant exactement le marché vanille.

2.4 Modèles de volatilité locale-stochastique (LSV)

Pour concilier la calibration exacte des options vanille (avantage des modèles LV) et la dynamique réaliste du smile (avantage des modèles SV), les modèles hybrides stochastique-local, notés LSV ont été introduits depuis les années 2000 [23, 24]. Un modèle LSV incorpore une fonction de volatilité locale $\ell(t, S)$ ajustée pour assurer l’ajustement exact des prix vanille, tout en conservant un facteur de volatilité stochastique multiplicatif qui génère une volatilité instantanée aléatoire :

$$dS_t = r S_t dt + \ell(t, S_t) \sqrt{\nu_t} S_t dW_t^S \quad (6)$$

où ν_t suit un processus stochastique (e.g. Heston) et $\ell(t, S)$ est la fonction de levier à déterminer.

Le modèle LSV doit reproduire le modèle LV de sorte que les deux processus aient des distributions marginales unidimensionnelles identiques et que les prix des options européennes coïncident pour tous les strikes K et toutes les maturités T . En utilisant le théorème de Gyöngy [21] (voir Annexe.1), on peut faire correspondre les termes de diffusion des Eqs. 3 et 6 par :

$$\sigma_{LV}(t, S) = \sqrt{\mathbb{E}^\mathbb{Q} [\ell(t, S(t))^2 \nu(t) \mid S(t) = S]}. \quad (7)$$

En réarrangeant cette équation, et puisque $\ell(t, S)$ est une fonction déterministe de t et S , on obtient l'expression de la fonction de levier :

$$\ell(t, S) = \frac{\sigma_{LV}(t, S)}{\sqrt{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\nu(t) \mid S(t) = S]}} \quad (8)$$

Les modèles LSV constituent la référence industrielle pour la valorisation des produits exotiques en equity et de change [20] car ils décrivent simultanément le coût du hedging statique et dynamique du smile. Un modèle LSV correctement calibré est arbitrage-free sur les options vanille et permet de valoriser les produits path-dependent de manière cohérente avec les observations de marché. Cette capacité à reproduire exactement la surface implicite tout en préservant une dynamique stochastique réaliste explique leur adoption généralisée pour les autocalls et autres dérivés complexes.

Cette puissance de modélisation vient cependant avec une complexité de calibration et de calcul significativement plus élevée. La calibration d'un modèle LSV requiert des boucles itératives imbriquant simulations Monte-Carlo ou résolutions d'équations aux dérivées partielles pour ajuster la volatilité locale en présence du facteur stochastique. Ce processus est computationnellement intensif pour une calibration complète. La simulation d'un modèle LSV est également plus coûteuse que celle d'un modèle SV pur, car la volatilité effective $\ell(t, S_t)\sqrt{\nu_t}$ doit être évaluée à chaque pas de temps, augmentant considérablement les temps de calcul [8].

Ces contraintes temporelles posent des défis pratiques sur les marchés de produits structurés, où la rapidité de réponse aux demandes de cotation est cruciale. Des approches récentes cherchent à accélérer les modèles LSV par des techniques d'apprentissage automatique, notamment l'entraînement de réseaux de neurones [5].

2.5 Modèles de volatilité rugueuse

Depuis le milieu des années 2010, une nouvelle classe de modèles de volatilité a émergé pour surmonter les limitations des approches classiques : les modèles à volatilité rugueuse. Ces modèles se caractérisent par une dynamique de variance présentant une mémoire fractionnaire et une régularité hölderienne faible, contrastant avec les diffusions de volatilité lisses de type brownien standard. Les trajectoires de variance apparaissent plus irrégulières que celles prédites par les processus de diffusion usuels.

Cette approche a été popularisée par les travaux de Gatheral et al. [19, 4] qui, en analysant des séries temporelles haute fréquence de volatilité réalisée, ont démontré que l'exposant de Hurst effectif de la volatilité est significativement inférieur à 0,5 (typiquement 0,1–0,3). Cette observation suggère une structure de volatilité non-markovienne à mémoire longue [14]. Gatheral [19] formalise cette intuition et démontre qu'un processus de variance fractionnaire simple reproduit mieux les propriétés empiriques des volatilités tout en s'ajustant efficacement à la surface implicite.

Le modèle Rough Heston constitue une extension directe du modèle de Heston classique où le noyau exponentiel de la variance est remplacé par un noyau à mémoire longue de type puissance. Mathématiquement, la variance ν_t suit un processus de Volterra-

Ornstein-Uhlenbeck défini par :

$$\begin{aligned}
dS_t &= r S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^S \\
\nu_t &= \nu_0 + \int_0^t K(t-s) \kappa(\theta - V_s) ds + \int_0^t K(t-s) \xi \sqrt{\nu_s} dW_s^\nu \\
K(t) &= \frac{t^{H-1/2}}{\Gamma(H+1/2)}, \quad H \in (0, 1/2)
\end{aligned} \tag{9}$$

où K est le noyau fractionnaire et H l'exposant de Hurst contrôlant la rugosité.

Contrairement au modèle de Heston standard où la covariance de la variance décroît exponentiellement, le Rough Heston présente une autocorrélation à décroissance en loi de puissance : $\text{Cov}(\nu_t, \nu_{t+\tau}) \sim \tau^{2H-1}$. Cette propriété permet de capturer la persistance à long terme observée empiriquement dans les données de volatilité.

Malgré la non-markovianité introduite par le noyau fractionnaire, Gatheral [18] a établi que le modèle Rough Heston appartient à la famille des modèles affines de variance forward. Cette structure préserve la possibilité de calculs semi-analytiques via une fonction caractéristique explicite, facilitant la calibration aux options européennes.

El Euch et Rosenbaum [14] ont obtenu l'expression de la fonction caractéristique du log-prix en résolvant une équation de Riccati fractionnaire [12]. La fonction caractéristique s'écrit :

$$\phi(u; T) = \exp[A(T, u) + B(T, u) \nu_0 + iu \ln S_0] \tag{10}$$

où les fonctions $A(T, u)$ et $B(T, u)$ sont solutions d'équations de Riccati fractionnaires résolues par discrétisation quadratique. Théoriquement, le modèle Rough Heston reproduit fidèlement plusieurs phénomènes empiriques que les modèles classiques peinent à capturer. Il génère une pente de skew ATM qui diverge en $T^{H-1/2}$ pour les maturités très courtes (voir [17], contrairement à la structure constante (pour T petit) des modèles markoviens. Cette propriété corrige le déficit des modèles traditionnels dans la modélisation du smile de court terme.

La calibration s'effectue efficacement grâce à la structure affine préservée, avec un coût computationnel très significativement supérieur au Heston classique (d'un facteur 10 sur applications) mais restant compatible avec l'usage industriel. El Euch et al. [13] ont également confirmé que le modèle reproduit l'effet Zumbach [13] : autocorrélation asymétrique entre volatilité réalisée et futurs, un phénomène empirique où les rendements passés prédisent mieux la volatilité future que l'inverse. Contrairement aux modèles markoviens classiques (comme Heston) qui sont temporellement symétriques et échouent à capturer cet effet.

Le modèle Rough Heston offre un formalisme plus riche que les approches classiques : avec $H = 0,5$, il redonne le Heston standard, tandis que des valeurs $H \approx 0,1$ capturent les propriétés de rugosité empiriquement observées. Cette flexibilité, combinée à une meilleure cohérence avec les données de volatilité, positionne le Rough Heston comme une alternative prometteuse pour la modélisation des dynamiques de volatilité complexes.

2.6 Impact du modèle sur le pricing des exotiques

L'utilisation d'un modèle de volatilité inadapté peut entraîner des erreurs significatives dans la valorisation d'un autocall. Il a été montré qu'un modèle local, même calibré sur les mêmes vanilles qu'un modèle stochastique, conduit souvent à un prix biaisé pour un produit à barrière de type knock-out [19]. En particulier, une option knock-out forward

est systématiquement moins chère sous un modèle local que sous un modèle de Heston calibré de façon équivalente, avec des écarts parfois substantiels. Ce biais provient du fait que le modèle local, dépourvu de volatilité future aléatoire, surestime la probabilité de toucher la barrière et sous-évalue ainsi la valeur conditionnelle de l'option. À l'inverse, les modèles stochastiques (SV, LSV) incorporent la variabilité future de la volatilité et l'effet de levier, ce qui explique leur usage privilégié pour la valorisation des autocalls.

3 Calibration des modèles

3.1 Données de marché

Les données utilisées dans cette étude proviennent de Yahoo Finance et concernent les options européennes sur l'indice S&P 500 observées le 3 juillet 2025. À cette date, le niveau de l'indice s'établit à $S_0 = 6278,12$ USD. Le taux sans risque retenu pour l'actualisation correspond au taux swap USD à 4 ans, fixé à $r = 3,86\%$ et appliqué de manière constante sur l'ensemble des maturités considérées.

Les prix d'options considérés correspondent aux *mid prices*, définis comme la moyenne arithmétique des cours *bid* et *ask*, conformément aux conventions de marché. À partir de ces cotations, les volatilités implicites nécessaires à la calibration des modèles sont calculées par inversion numérique de la formule de Black-Scholes.

Le choix du S&P 500 comme sous-jacent de référence se justifie par plusieurs facteurs : la liquidité de cet indice, la profondeur de son marché d'options, et la prépondérance des produits structurés autocallables émis sur ce type de grands indices *equity*. L'utilisation d'options européennes sur indice présente également l'avantage d'éviter les complexités liées au traitement des dividendes discrets, simplifiant ainsi l'estimation des volatilités implicites.

Opportunités d'arbitrage

Les cotations d'options observées sur le marché présentent parfois des incohérences théoriques constituant des opportunités d'arbitrage. Ces incohérences, contraires à l'hypothèse d'efficience, proviennent de facteurs pratiques tels que la microstructure de marché, les coûts de transaction, les contraintes de liquidité, ou les erreurs temporaires de cotation.

D'un point de vue théorique, l'absence d'arbitrage impose plusieurs contraintes sur les prix d'options européennes. Pour des options de même maturité T , les prix de *call* $C(K, T)$ doivent satisfaire les conditions suivantes :

- **Monotonie** : $\frac{\partial C(K, T)}{\partial K} \leq 0$
- **Convexité** : $\frac{\partial^2 C(K, T)}{\partial K^2} \geq 0$
- **Bornes** : $\max(S_0 - Ke^{-rT}, 0) \leq C(K, T) \leq S_0$ (bornes d'arbitrage)

Les graphiques présentés (Figures 1a–1c) illustrent les cotations de marché pour trois maturités représentatives, où les points cerclés en rouge signalent les violations manifestes de ces conditions d'absence d'arbitrage. .

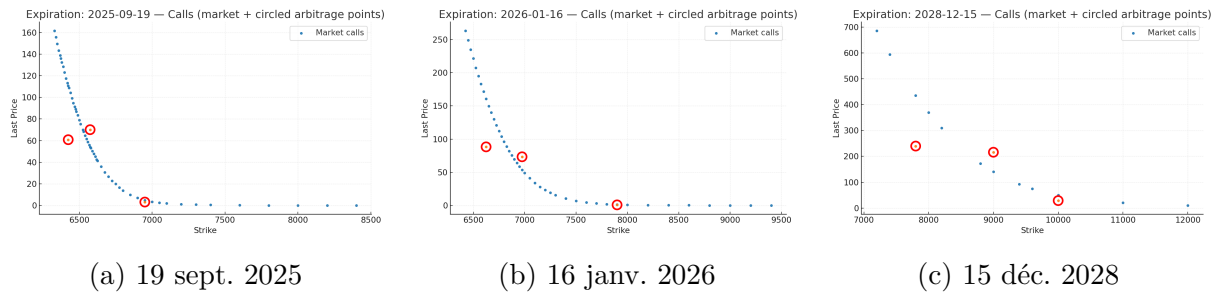


FIGURE 1 – Cotation de marché des calls pour trois maturités représentatives.

L'observation de telles violations dans les données de marché s'explique par plusieurs mécanismes :

1. **Asynchronisme des cotations** : les prix *bid/ask* de différents strikes peuvent être mis à jour de manière non simultanée
2. **Contraintes de liquidité** : certains strikes peu liquides présentent des *spreads* importants générant des incohérences temporaires
3. **Coûts de transaction** : l'exploitation effective d'un arbitrage peut être rendue non profitable par les coûts associés

Filtration

Pour garantir la qualité des données utilisées dans la calibration, nous avons mis en place des filtres systématiques pour éliminer les cotations non exploitables ou aberrantes. Les critères d'exclusion que nous avons définis comprennent d'abord les cotations présentant une inversion des cours ($\text{ask} < \text{bid}$), les options expirées (maturité résiduelle $T \leq 0$), les *mid prices* négatifs ou nuls, ainsi que les violations manifestes des conditions d'arbitrage identifiées visuellement. Nous excluons également les options présentant des *spreads bid-ask* très élevés (indicateur de faible liquidité), les volatilités implicites calculées en dehors d'une plage de cohérence économique, et les points isolés créant des discontinuités importantes dans le smile.

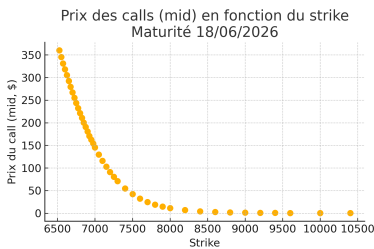
Ce protocole de filtrage permet d'éliminer environ 10% des cotations initiales, concentrant l'analyse sur des données de qualité supérieure et économiquement cohérentes.

Synthèse du jeu de données final

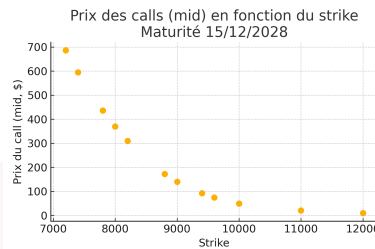
Après application du protocole de filtrage, le jeu de données final comprend 18 maturités s'échelonnant de 3 mois à plus de 5 ans, représentant un total de 2 396 cotations d'options. La répartition par maturité est présentée dans le tableau ci-dessous :

TABLE 1 – Synthèse du jeu de données après filtrage

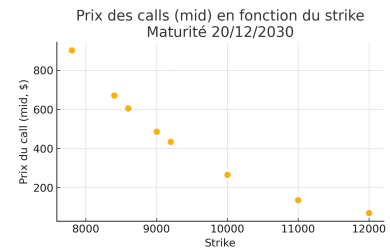
Maturité	Temps jusqu'échéance (années)	Nb strikes	Strike ATM	Prix call ATM (\$)
2025-09-30	0,24	437	6275	156,40
2025-10-31	0,33	182	6275	184,70
2025-11-28	0,40	127	6275	205,80
2025-12-31	0,49	246	6275	228,15
2026-01-16	0,54	172	6275	236,75
2026-02-20	0,63	157	6275	256,95
2026-03-31	0,74	128	6275	278,20
2026-04-17	0,79	156	6275	285,45
2026-05-15	0,86	155	6275	299,40
2026-06-30	0,99	75	6275	321,40
2026-07-17	1,04	79	6250	321,30
2026-09-18	1,21	113	6275	355,35
2026-12-18	1,46	149	6275	387,20
2027-06-17	1,95	69	6275	441,40
2027-12-17	2,45	85	6250	477,85
2028-12-15	3,45	52	6200	528,55
2029-12-21	4,47	49	6200	582,10
2030-12-20	5,46	46	6200	618,25



(a) Maturité 18/06/2026



(b) Maturité 15/12/2028



(c) Maturité 20/12/2030

FIGURE 2 – Prix des calls (mid) en fonction du strike pour trois maturités lointaines.

3.2 Surface de volatilité implicite

Les prix de marché des options ne sont observés que sur une grille discrète de strikes et de maturités. La construction d'une surface de volatilité continue et différentiable s'avère nécessaire pour plusieurs raisons. D'abord, l'application de la formule de Dupire pour le calcul de la volatilité locale requiert une surface suffisamment lisse pour permettre le calcul numérique des dérivées partielles. Ensuite, la calibration des modèles de volatilité stochastique nécessite une évaluation de la fonction caractéristique sur une grille dense de strikes, dépassant les points de cotation disponibles. Pour construire cette surface dense, nous avons choisi une approche basée sur le paramétrage *eSSVI* (extended Surface SVI). Cette méthode présente l'avantage de garantir l'absence d'arbitrage de la surface interpolée et offre une flexibilité pour reproduire fidèlement les smiles observés.

Pour chaque maturité T_i , nous calibrons la variance totale $w(T_i, k)$ à l'aide du para-

métrage $eSSVI$ défini par les paramètres $(\theta_i, \rho_i, \psi_i)$:

$$w(T_i, k) = \frac{1}{2} \left(\theta_i + \rho_i \psi_i k + \sqrt{(\psi_i k + \rho_i)^2 + 1 - \rho_i^2} \right) \quad (11)$$

où $k = \ln \left(\frac{K}{F_{0,T_i}} \right)$ représente le log-moneyness forward et F_{0,T_i} le prix forward à maturité T_i .

Ce paramétrage, développé initialement par Gatheral et Jacquier [16], garantit le respect des conditions d'absence d'arbitrage. Spécifiquement, il assure la cohérence *butterfly* (positivité de la densité risque-neutre) et la cohérence *calendar* (croissance de la variance totale avec la maturité) de la surface construite [25].

La calibration des paramètres $eSSVI$ s'effectue par minimisation au sens des moindres carrés de l'écart entre les variances totales de marché et celles prédites par le modèle :

$$(\theta_i^*, \rho_i^*, \psi_i^*) = \arg \min_{(\theta_i, \rho_i, \psi_i)} \sum_j [w_{\text{mkt}}(T_i, k_j) - w_{\text{eSSVI}}(T_i, k_j; \theta_i, \rho_i, \psi_i)]^2 \quad (12)$$

sous contraintes d'absence d'arbitrage.

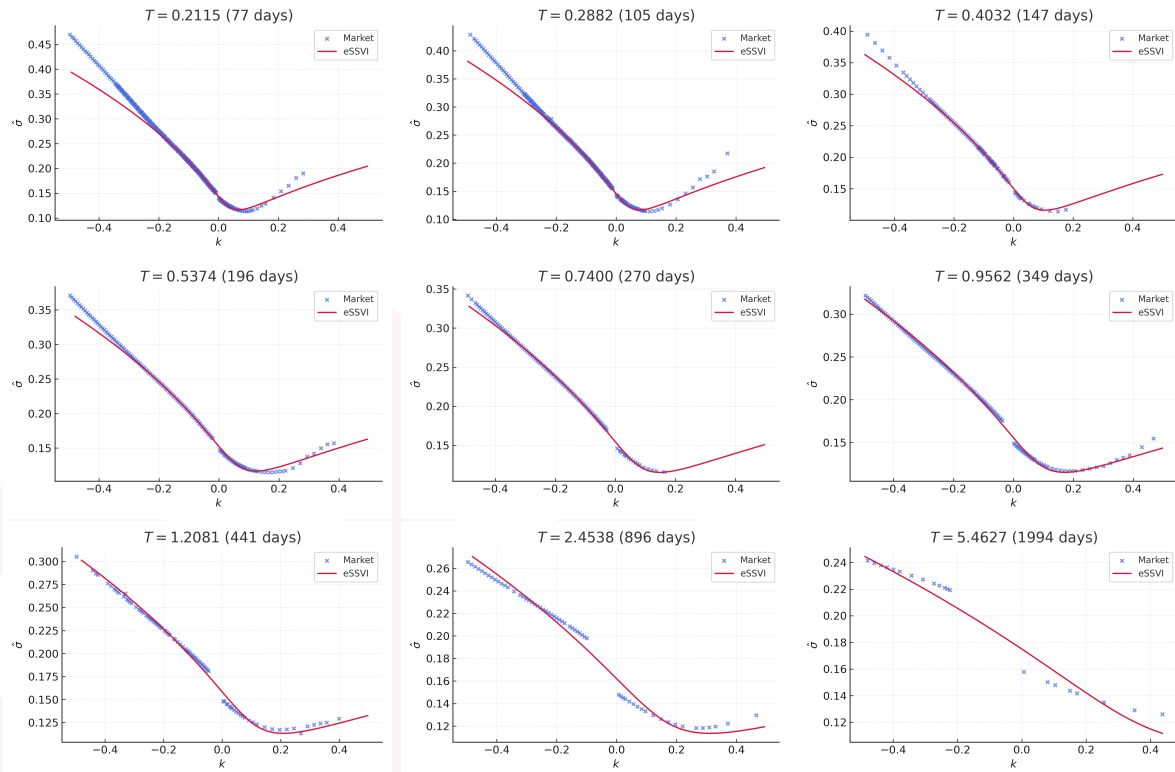


FIGURE 3 – Smiles de volatilité $eSSVI$ ajustés sur les options standards S&P 500 au 03 juillet 2025, dans l'espace log-moneyness forward k et volatilité implicite. Les points bleus représentent les volatilités implicites, et la courbe rouge correspond à l'ajustement $eSSVI$.

3.3 Calibration du modèle de volatilité locale

À partir de la surface de volatilité implicite $\sigma_{\text{impl}}(T, K)$ calibrée via $eSSVI$, nous reconstruisons les prix d'options européennes $C(T, K)$ à l'aide de la formule de Black-Scholes. Nous calibrons le modèle de volatilité locale en appliquant directement la formule de

Dupire (4) sur la surface de prix construite.

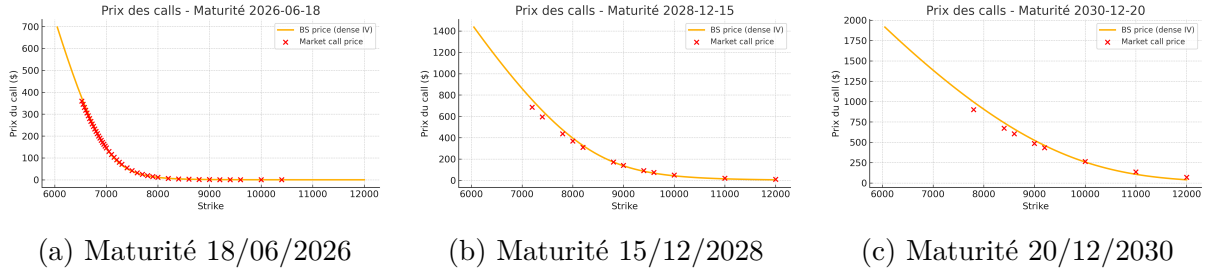


FIGURE 4 – Comparaison entre les prix de calls calculés via la surface eSSVI et les prix de marché pour trois maturités.

Les dérivées partielles nécessaires, $\partial_T C$, $\partial_K C$ et $\partial_{KK}^2 C$, sont calculées par différences finies sur la grille densifiée (T, K) . Pour limiter l'amplification du bruit numérique lors du calcul de la dérivée seconde $\partial_{KK}^2 C$, une régularisation de Tikhonov est appliquée sur la surface des prix, améliorant la stabilité numérique de la procédure.

L'exigence d'une surface implicite sans arbitrage (*butterfly* et *calendar*) est cruciale pour assurer la stabilité numérique de la formule de Dupire, particulièrement pour le terme au dénominateur $K^2 \partial_{KK}^2 C$, et garantir l'interprétation probabiliste correcte du modèle par la positivité de la densité risque-neutre.

La figure 6 illustre la comparaison entre les prix de calls calculés via la surface *eSSVI* (courbe bleue) et ceux obtenus par résolution de l'équation aux dérivées partielles de Dupire (courbe orange) pour différentes maturités.

La calibration du modèle de Dupire présente une erreur quadratique moyenne (RMSE) de 12,14 USD, correspondant à une erreur absolue moyenne en pourcentage (MAPE) de 4,9%. Plus de 91% des prix modélisés se situent à moins de 10% des prix observés sur le marché.

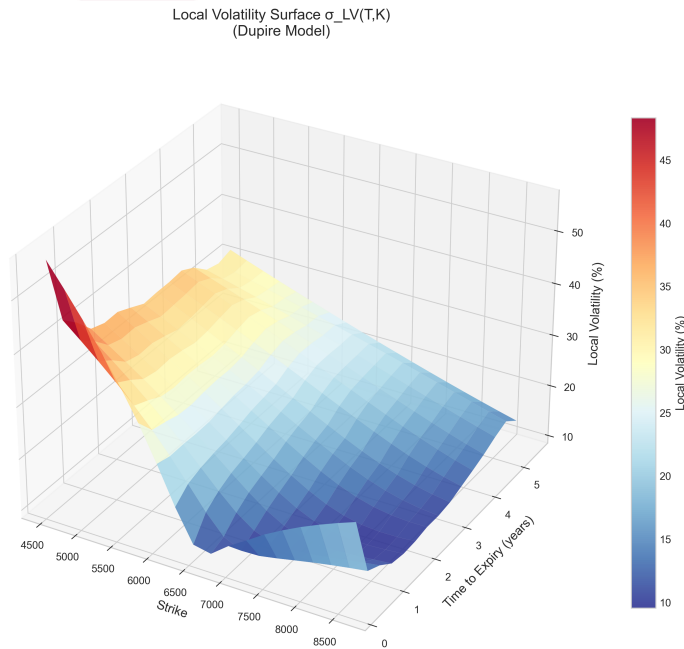


FIGURE 5 – Surface de volatilité locale $\sigma_{LV}(T, K)$ obtenue par calibration de Dupire.

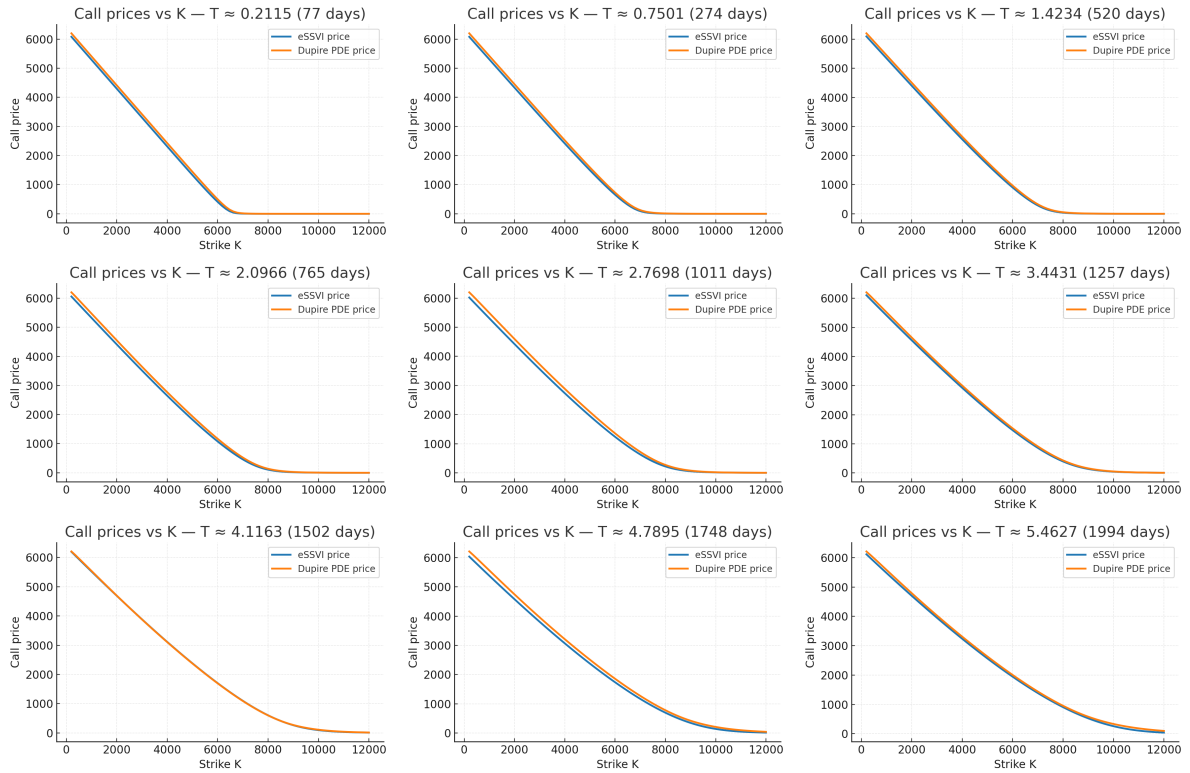


FIGURE 6 – Validation de la calibration Dupire : comparaison entre les prix eSSVI et les prix obtenus par l'équation de Dupire pour différentes maturités.

Théoriquement, la construction du modèle de volatilité locale selon Dupire permet de reproduire exactement les prix de marché sur l'ensemble de la surface, en l'absence de bruit et d'imperfections, la formule s'appuyant directement sur les dérivées des prix d'options. Cependant, les prix observés intègrent du bruit de cotation, des erreurs de marché et parfois une liquidité limitée, notamment pour les strikes extrêmes. L'interpolation et le lissage préalables de la surface des calls, destinés à corriger ces erreurs potentielles, introduisent un biais numérique et expliquent la présence d'un résidu d'erreur, de sorte que l'ajustement n'est pas parfaitement exact, mais reste très proche de la surface observée.

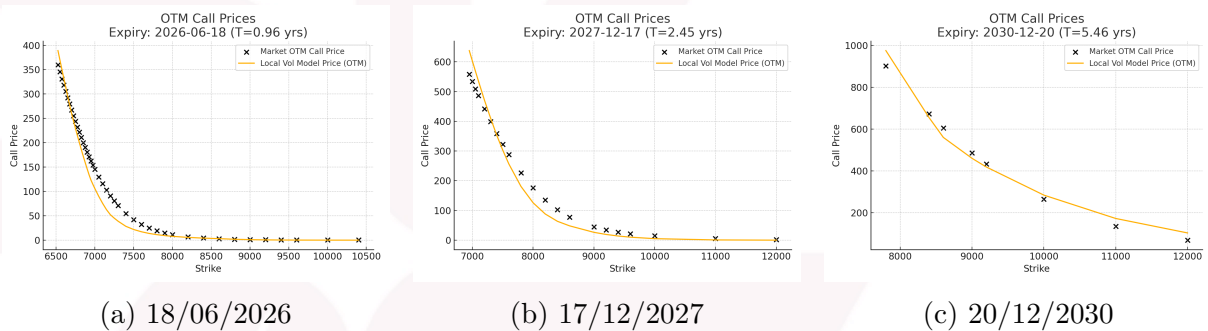
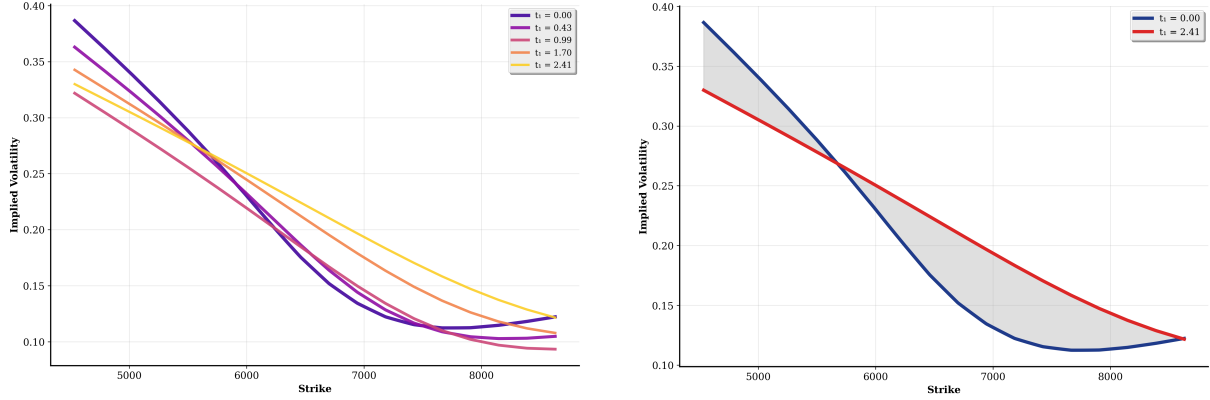


FIGURE 7 – Prix des calls OTM : comparaison marché (points) et modèle de volatilité locale (ligne) pour trois maturités.

Comme expliqué précédemment dans 2.2, le modèle de volatilité locale induit un *aplatissement* progressif des smiles de volatilité forward lorsque l'on considère des options à départ différé (*forward-start options*). La Figure 8a met ce phénomène en évidence sur nos

données : plus la date de départ t_1 est lointaine, plus le smile forward s'aplatit, jusqu'à devenir quasi-linéaire pour les échéances éloignées. La Figure 8b compare explicitement le smile forward à $t_1 = 0$ et à $t_1 = 2.41$ ans, soulignant la réduction marquée de l'amplitude et du skew.



(a) Évolution empirique du smile de volatilité forward pour différents t_1 .

(b) Comparaison du smile forward à $t_1 = 0$ et $t_1 = 2.41$ ans (aplatissement).

FIGURE 8 – Analyse du comportement des smiles de volatilité forward à la valeur du spot.

3.4 Calibration du modèle de Heston

Heston [22] démontre que le prix d'un call européen sous le modèle (5) peut s'exprimer sous forme d'intégrale semi-fermée en utilisant la fonction caractéristique jointe du processus. Cette formulation évite la simulation Monte-Carlo lors de la calibration aux options vanille et permet une évaluation rapide des prix.

Pour accélérer le calcul des prix sur une grille dense de strikes, nous utilisons la méthode de transformée de Fourier rapide (FFT) proposée par Carr et Madan [7]. Cette approche évalue efficacement les prix d'options pour l'ensemble des strikes à partir de la fonction caractéristique du log-prix :

$$C_{\theta}(K, T) = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} \Re \left[\frac{e^{-iuk} \phi_T(u - i(\alpha + 1); \theta)}{(\alpha + iu)(\alpha + iu + 1)} \right] du \quad (13)$$

où $k = \ln(K/S_0)$ représente le log-moneyness, $\phi_T(u; \theta)$ la fonction caractéristique du log-prix sous le modèle de Heston, et $\alpha > 0$ un paramètre assurant la convergence de l'intégrale.

Nous ajustons le vecteur de paramètres $\theta = (\nu_0, \theta, \kappa, \xi, \rho)$ en minimisant l'erreur quadratique moyenne sur les volatilités implicites :

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \sum_{(i,j) \in \mathcal{D}} \left(\sigma^{\text{mkt}}(T_i, K_j) - \sigma^{\text{mod}}(T_i, K_j; \theta) \right)^2 \quad (14)$$

où \mathcal{D} représente l'ensemble des couples (maturité, strike) retenus après filtrage, et $\text{RMSE}_{\sigma}(\theta) = \sqrt{\mathcal{L}(\theta)}$ l'erreur quadratique moyenne résultante.

Les bornes de calibration sont définies comme suit :

$$\nu_0, \theta \in [10^{-4}, 1.0], \quad \kappa \in [0.1, 8.0], \quad \xi \in [0.01, 5.0], \quad \rho \in [-1, 1]$$

Le tableau 2 présente les paramètres calibrés ainsi que l'indicateur de qualité global. La figure 10 illustre l'ajustement obtenu sur la surface de volatilité implicite et la comparaison avec les prix de marché pour différentes maturités.

TABLE 2 – Paramètres calibrés du modèle de Heston (3 juillet 2025)

	ν_0	θ	κ	ξ	ρ	RMSE $_{\sigma}$ (vol-pts)
Valeur	0,0177	0,0242	2,363	0,337	-0,503	0,0074

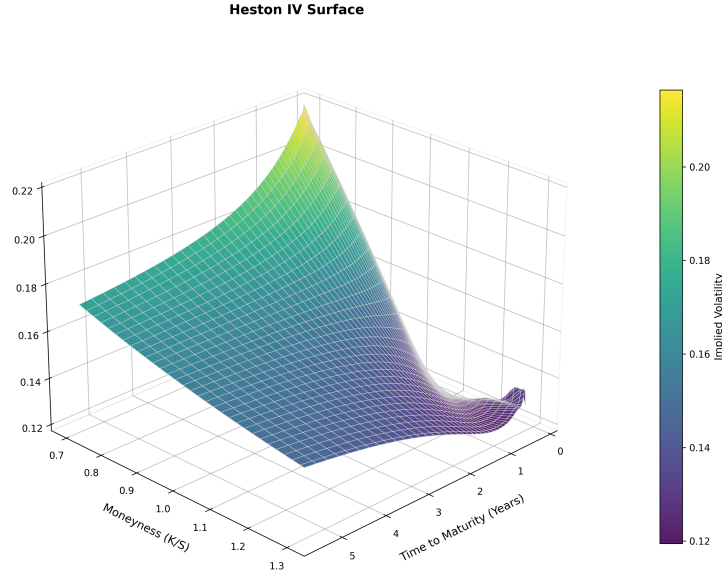


FIGURE 9 – Surface de volatilité implicite reproduite par le modèle de Heston calibré.

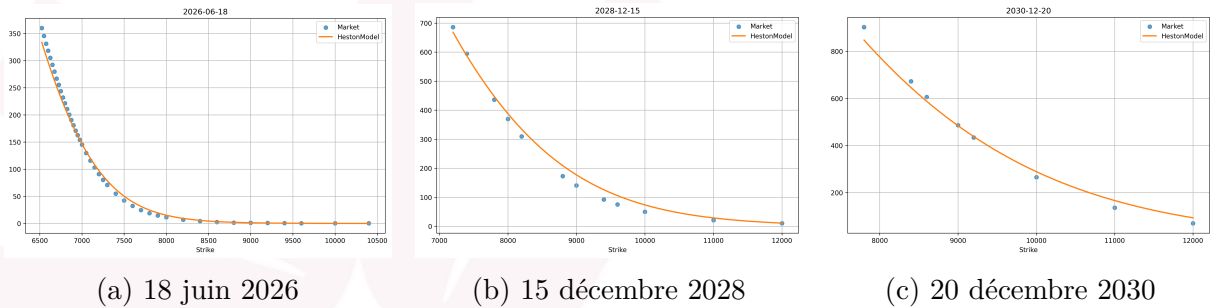


FIGURE 10 – Comparaison des prix de calls entre le marché (points) et le modèle de Heston calibré (ligne) pour trois maturités représentatives.

3.5 Calibration du modèle LSV Heston

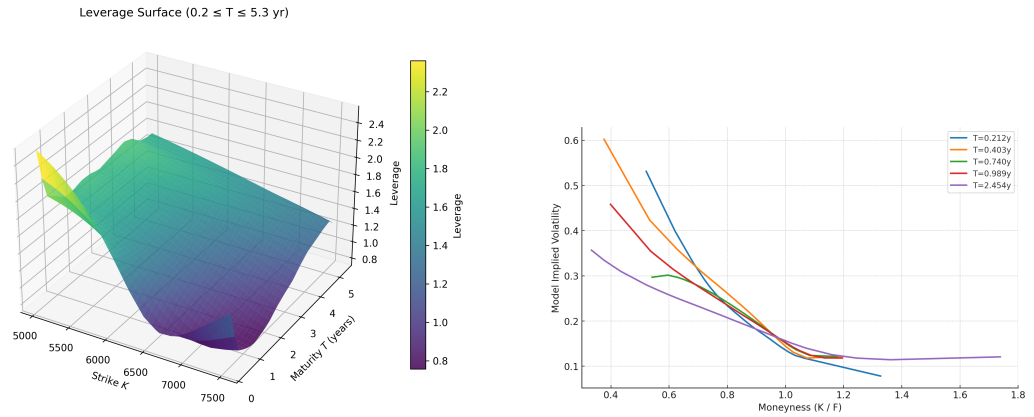
Nous avons obtenu $\sigma_{LV}(t, S)$ par calibration de la surface de volatilité locale, et la dynamique de ν_t par la calibration du modèle de Heston. La calibration LSV consiste à construire $\ell(t, S)$ telle que (8) soit satisfaite sur une grille (t_m, S_j) et que les prix vanilles du modèle LSV reproduisent le marché.

Pour estimer $\mathbb{E}[\nu_t \mid S_t = S]$ nous simulons N trajectoires sous Heston-LSV courant (avec ℓ fixée) et on estime, aux temps t_m , l'espérance conditionnelle via une régression noyau :

$$\widehat{\mathbb{E}}[\nu_{t_m} \mid S_{t_m} = S_j] = \frac{\sum_{i=1}^N K_h(S_j - S_{t_m}^{(i)}) \nu_{t_m}^{(i)}}{\sum_{i=1}^N K_h(S_j - S_{t_m}^{(i)})}, \quad K_h(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2h^2}\right), \quad (15)$$

et où la bande passante h_i est fixée à $h = 0.1 \times S_0$ pour chaque tranche temporelle. Nous appliquons ensuite (16) point par point, avec une *relaxation* pour stabiliser :

$$\ell^{(k+1)}(t_m, S_j) = (1 - \eta) \ell^{(k)}(t_m, S_j) + \eta \frac{\sigma_{LV}(t_m, S_j)}{\sqrt{\widehat{\mathbb{E}}^{(k)}[\nu_{t_m} \mid S_{t_m} = S_j]}}, \quad \eta \in (0, 1]. \quad (16)$$



(a) Leverage function $\ell(t, s)$ calibrée sur les options S&P 500 au 3 juillet 2025. avec $M = 50000$. (b) Smile de volatilité du S&P500 implicite sous le modèle LSV

FIGURE 11 – Surfaces calibrées sur options S&P 500 au 3 juillet 2025.

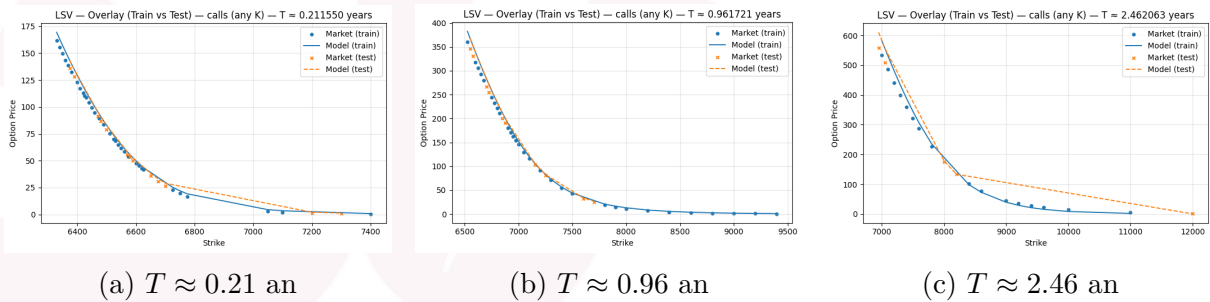


FIGURE 12 – Comparaison des prix de calls : marché (points) vs modèle de LSV (ligne) pour trois maturités.

3.6 Calibration du modèle Rough Heston

Le modèle Rough Heston (9) étend le modèle de Heston classique en introduisant une mémoire fractionnaire dans la dynamique de la variance. La calibration repose sur la résolution numérique d'équations de Riccati fractionnaires pour obtenir la fonction caractéristique, puis sur l'inversion de Fourier pour le calcul des prix d'options [12].

Omar et al [12] montrent que la fonction caractéristique du log-prix s'écrit, comme dans Heston, via une équation de Riccati, mais *fractionnaire*. Plus précisément, si $h(a, \cdot)$ résout

$$D_t^\alpha h(a, t) = F(a, h(a, t)), \quad I_t^{1-\alpha} h(a, 0) = 0,$$

avec D^α la dérivée de Caputo, $I^{1-\alpha}$ l'intégrale fractionnaire, et

$$F(a, x) = \frac{1}{2}(-a^2 - ia) + \lambda(ia\rho\nu - 1)x + \frac{1}{2}(\lambda\nu)^2 x^2,$$

alors la fonction caractéristique vérifie

$$\phi(a, T) = \exp\left(\underbrace{\lambda\theta \int_0^T h(a, t) dt}_{I^1 h(T)} + V_0 \underbrace{I_T^{1-\alpha} h(a, \cdot)}_{\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^T (T-t)^{-\alpha} h(a, t) dt}\right).$$

La CF du log- S_T s'obtient en multipliant par $e^{ia(\log S_0 + rT)}$.

Pour résoudre la Riccati fractionnaire, nous utilisons le schéma prédictor-correcteur d'Adams–Bashforth–Moulton décrit dans [12], basé sur la forme de Volterra

$$h(a, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} F(a, h(a, s)) ds.$$

Les prix d'options vanille sont ensuite calculés par la méthode FFT de Carr-Madan [7], utilisant la même formulation que pour le modèle de Heston classique (13) mais avec la fonction caractéristique fractionnaire :

$$C_{\Theta}^{\text{rHeston}}(K, T) = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[\frac{e^{-iuk} \phi_T^{\text{rHeston}}(u - i(\alpha + 1); \Theta)}{(\alpha + iu)(\alpha + iu + 1)} \right] du \quad (17)$$

où $\Theta = (H, \lambda, \theta, \nu, \rho, \nu_0)$ représente le vecteur des paramètres du modèle Rough Heston.

Nous calibrons en minimisant l'erreur quadratique sur les volatilités implicites :

$$\min_{\Theta} \sum_{i,j} (\text{IV}_{\text{mod}}(K_i, T_j; \Theta) - \text{IV}_{\text{mkt}}(K_i, T_j))^2 \quad (18)$$

Nous utilisons une approche multi-démarrages combinant une phase globale par algorithme évolutionnaire (Differential Evolution) suivie d'un raffinement local par L-BFGS-B. Les contraintes sur les paramètres sont définies par :

$$H \in (0, 0.5), \quad \lambda > 0, \quad \theta > 0, \quad \nu > 0, \quad \rho \in (-1, 1), \quad \nu_0 > 0 \quad (19)$$

Le tableau 3 présente les paramètres calibrés et l'erreur moyenne obtenue. La figure 13 compare les volatilités implicites de marché et celles générées par le modèle calibré pour plusieurs maturités.

TABLE 3 – Paramètres calibrés du modèle de Rough Heston et erreur quadratique moyenne (RMSE).

H	λ	θ	ν	ρ	ν_0	RMSE
0.2561	1.0787	0.0847	0.6426	-0.7323	0.0210	0.0021

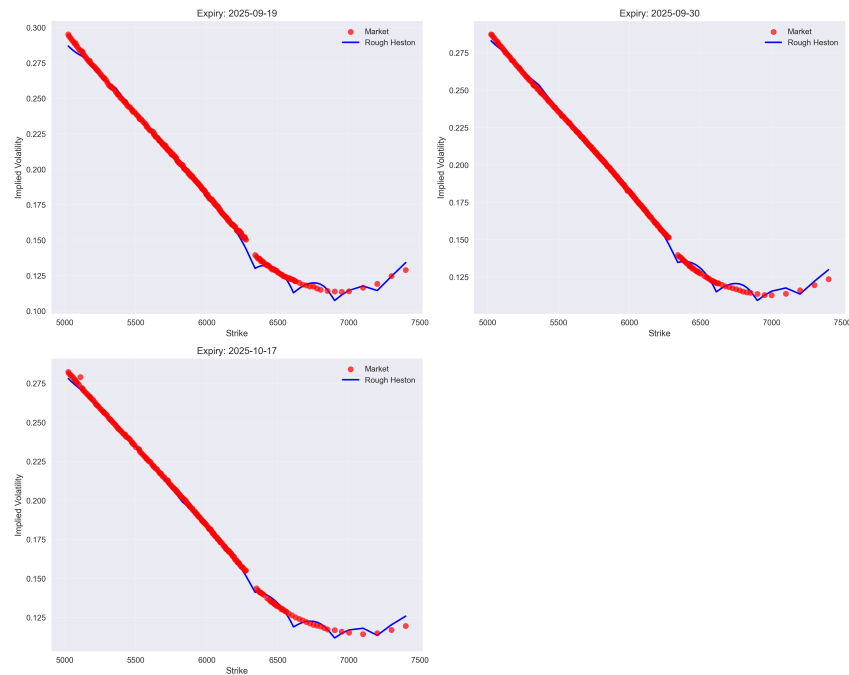


FIGURE 13 – Calibration du modèle de Rough Heston : comparaison entre les volatilités implicites de marché (points rouges) et celles générées par le modèle calibré (courbe bleue) pour plusieurs maturités.

L'ajustement obtenu est globalement satisfaisant sur l'ensemble des maturités, y compris dans les zones hors-la-monnaie où le modèle de Heston classique présente généralement des limitations. L'exposant de Hurst calibré ($H = 0,2561$) confirme la présence de rugosité dans les données de volatilité du S&P 500, cohérente avec les observations empiriques de la littérature.

Nous remarquons de légères irrégularités locales dans les smiles ajustées. Ces artefacts proviennent principalement des paramètres numériques de la FFT (taille de grille, troncature fréquentielle) plutôt que de limitations structurelles du modèle.

Le coût computationnel de la calibration est environ dix fois supérieur à celui du modèle de Heston standard, principalement dû à la résolution des équations fractionnaires.

Afin de mieux évaluer la qualité du calibrage du modèle, l'ensemble des données de marché a été séparé en deux sous-ensembles distincts : un jeu d'entraînement utilisé directement lors de la calibration des paramètres, et un jeu de validation complètement tenu à l'écart de l'optimisation. Cette approche permet de distinguer l'erreur de calibration (mesurée sur le train) de l'erreur de prédiction (mesurée sur le test), et donc d'évaluer la capacité du modèle à généraliser au-delà des points utilisés pour l'ajustement. Les figures suivantes illustrent cette superposition marché/modèle pour plusieurs maturités représentatives sous le modèle de Rough Heston.

Rough Heston — IV Surface 03/07/2025

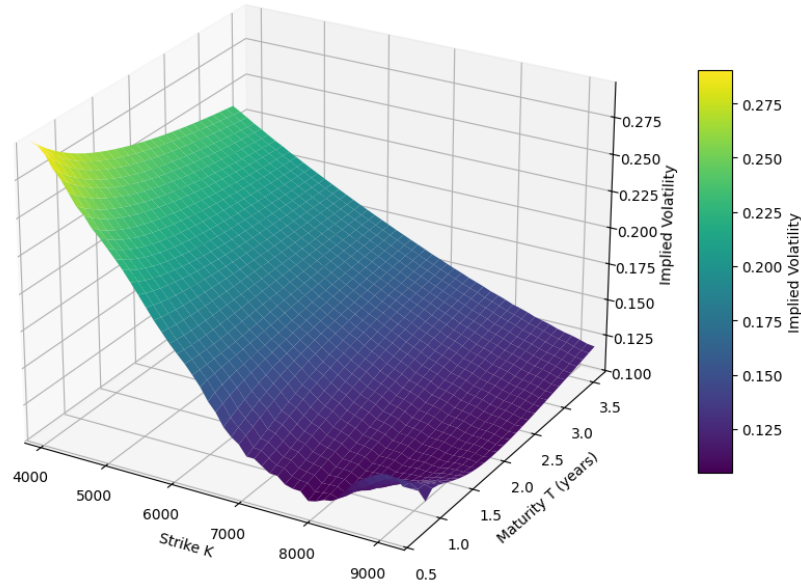


FIGURE 14 – Surface de volatilité implicite obtenue sous le modèle de Rough Heston (03/07/2025). La surface est représentée en fonction du strike K (axe x) et de la maturité T (axe y).

La figure 14 présente la surface de volatilité implicite générée par le modèle. La structure en maturité est cohérente avec les données : les maturités courtes présentent des niveaux de volatilité plus élevés, qui diminuent progressivement avec l'échéance.

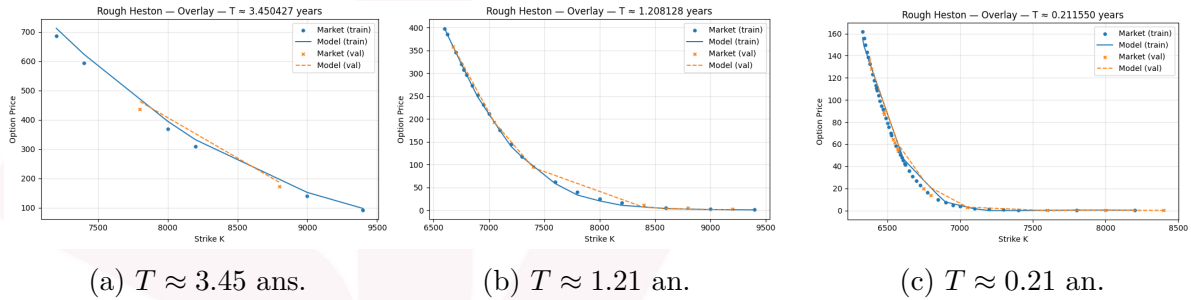


FIGURE 15 – Superposition marché / modèle (train et validation) pour plusieurs maturités sous Rough Heston.

4 Pricing des Autocallable Barrier Reverse Convertibles (ABRCs) :

Dans cette section, on s'intéresse au pricing d'une catégorie populaire de produits structurés, les *autocallable barrier reverse convertibles* (ABRC). Plus précisément, nous comparons la valorisation des dérivés exotiques *Athéna* sous les dynamiques Heston-LSV et rHeston. Dans toute l'analyse, nous supposons que les flux sont actualisés au taux sans risque, négligeant ainsi le risque de crédit de l'émetteur du produit.

4.1 Les BRC

Typiquement, un structuré BRC se décompose en un zéro-coupon, une position *short* sur une option put barrière *down-and-in*, et une série de coupons. Ces coupons peuvent eux-mêmes être soumis à condition : ils sont parfois conditionnés à l'évolution de l'actif sous-jacent à certaines dates d'observation intermédiaires (et donc sensibles à des barrières du type *down-and-out*) ; ou garantis de façon inconditionnelle.

La fonction d'*autocall* ajoute au produit une caractéristique de remboursement anticipée via des barrières *up-and-out* : si, à une date d'observation, la barrière est franchie, la note est immédiatement remboursée au pair et le coupon de la période est versé [15].

En environnement de taux d'intérêt bas, ces produits offrent des coupons plus élevés et une probabilité non négligeable de remboursement anticipé quand le sous-jacent est stable ou en légère hausse. En contrepartie, ils portent un *downside tail risk* marqué en cas de *knock-in* et clôture finale sous le strike, et présentent une forte dépendance au modèle (dynamique de smile, corrélation spot-vol) ainsi qu'une couverture coûteuse [15].

Sur des autocalls US, les écarts prix-valeur *persistent* sous des modèles naïfs (Black – Scholes / LV) et se *réduisent* lorsque la volatilité stochastique est introduite [2], ce qui révèle que la « *fair value* » est *très sensible au choix de modèle*. Opérationnellement, une sous-tarification (ou sur-tarification) systématique induit des erreurs sur les probabilités d'autocall/knock-in, des grecs mal calibrés et donc un P&L de couverture instable, en particulier près des barrières et des dates d'observation ; d'où la nécessité de recourir à des cadres qui reproduisent la covariance spot-vol et la smile forward pour obtenir des prix et des risques fidèles [15].

4.2 Modélisation des Autocallable Athéna

Pour notre étude, nous avons choisi un exemple des produits ABRC : les *Athéna*. Les produits *Athéna* ne versent *aucun coupon pendant la vie du produit* ; tous les coupons sont payés *au moment de la clôture* (rappel anticipé ou maturité) si la condition est satisfaite. À chaque date d'observation T_i , si le sous-jacent est au moins au niveau A_i (souvent $A_i = S_0$), le produit est rappelé au pair et l'investisseur reçoit N plus un coupon *mémoire* égal au cumul *par année écoulée* depuis l'émission. À maturité, si aucun rappel n'a eu lieu, l'investisseur récupère le capital N et reçoit le cumul des coupons *uniquement* si $S_{T_N} \geq A_N$ (sinon N seul). Il n'y a pas de jambe reverse-convertible ni de barrière *knock-in* dans cette version à capital garanti.

Le temps d'*autocall* τ_{ac} correspond à la première date d'observation T_i à laquelle le sous-jacent atteint ou dépasse le niveau d'autocall A_i . Si aucune date ne satisfait cette condition, on considère que $\tau_{ac} = +\infty$. On a alors :

$$\tau_{ac} = \inf\{T_i \in \mathcal{T} : S_{T_i} \geq A_i\}, \quad (\inf \emptyset := +\infty), \quad i^* = \min\{i : T_i = \tau_{ac}\},$$

et les coupons cumulés $Y_i := N \sum_{j=1}^i C_j$ (avec $C_j = C \Delta_j$). Notons $\tau := \min(\tau_{ac}, T_N)$ et $i(\tau) = i^*$ si $\tau = \tau_{ac}$, sinon $i(\tau) = N$.

Le payoff du produit s'écrit alors de manière suivante :

$$\Pi = D(0, \tau_{ac}) \left(N + Y_{i^*} \right) \mathbf{1}_{\{\tau_{ac} \leq T_N\}} + D(0, T_N) \left(N + Y_N \mathbf{1}_{\{\tau_{ac} = +\infty, S_{T_N} \geq A_N\}} \right).$$

(i) si un autocall est exercé, l'investisseur reçoit le capital N plus le cumul des coupons Y_{i^*} actualisé à la date τ_{ac} . On a alors le versement de $N + Y_{i^*}$ à T_{i^*}

(ii) Tandis qu'en l'absence d'autocall, le paiement à maturité correspond au capital N augmenté des coupons cumulés seulement si la condition sur le sous-jacent à maturité est respectée, c'est-à-dire $S_{T_N} \geq A_N$. On a alors le versement de $N + Y_N \mathbf{1}_{\{S_{T_N} \geq A_N\}}$ (sinon N seul)

paramètres du produit

Objet	Symbole	Définition / Interprétation
Sous-jacent	$(S_t)_{t \in [0, T_N]}, S_0$	Processus de prix et niveau initial.
Dates d'observation	$\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_N\}$	Tests d'autocall (Bermudan).
Pas de temps	$\Delta_i = T_i - T_{i-1}$	Intervalle entre observations.
Niveau(s) d'autocall	$A_i = B_A(T_i) S_0$	Seuils (souvent $A_i = S_0$; possible <i>step-down</i>).
Nominal	N	Montant notionnel.
Coupon de période	$C_i = C \Delta_i$	Mémoire Athéna : acquis par année écoulée, payé à la clôture.
Facteur d'actualisation	$D(0, t)$	Actualisation au taux sans risque.

Sur la figure 16, des trajectoires du sous-jacent d'un Ahténa sont affichés. On peut observer que dès que celui-ci atteint la barrière d'activation de l'autocall, le remboursement est effectif et il n'est plus utile de simuler le sou-jacent jusqu'à la maturité

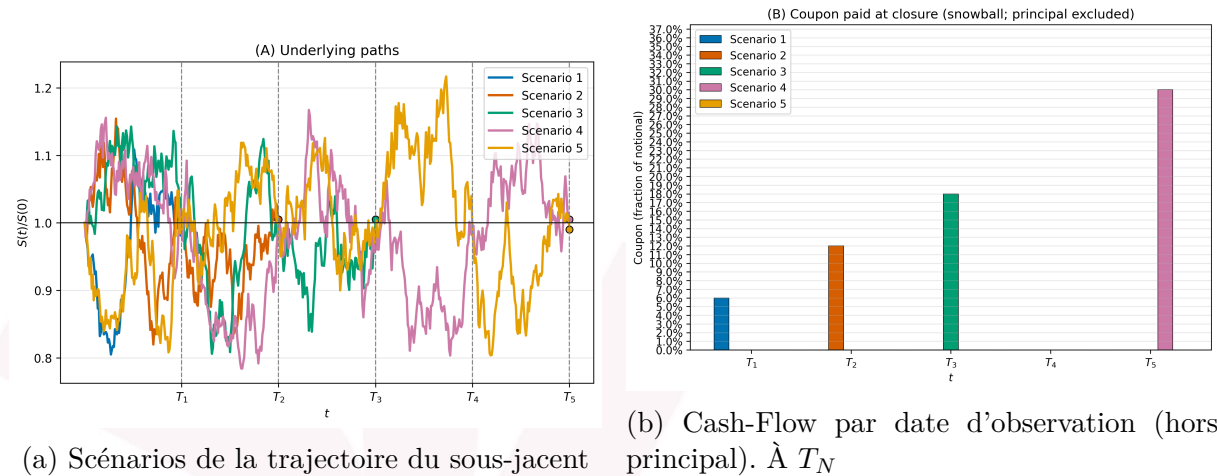


FIGURE 16 – Scénarios illustratifs pour l'Athéna. Les barrières d'autocall sont testées de type *Bermudan*.

4.3 Pricing sous le modèle LSV

Le payoff des produits Athéna, de nature fortement path-dependent, est évalué par simulation Monte Carlo. La dynamique du modèle LSV est discrétisée à l'aide du schéma d'Euler-Maruyama. Pour un pas de temps Δt , on a :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \ell^2(t, S_t) V_t \right) \Delta t + \ell(t, S_t) \sqrt{V_t \Delta t} Z^S \right),$$

$$V_{t+\Delta t} = V_t + \kappa(\theta - V_t) \Delta t + \xi \sqrt{V_t \Delta t} Z^V,$$

avec $\text{corr}(Z^S, Z^V) = \rho$.

La grille de simulation est construite de manière à inclure explicitement toutes les dates d'observation, ce qui permet de traiter les franchissements de barrières. Une réduction de variance est obtenue par l'utilisation de variables antithétiques. Les probabilités d'autocall et de survie sont estimées directement à partir des trajectoires simulées.

4.4 Pricing sous rHeston

La dynamique du modèle Rough Heston est non markovienne, ce qui empêche l'application directe d'un schéma d'Euler–Maruyama sur la variance. Pour rendre la simulation exploitable, nous utilisons la méthode de *Markovian lifting* [1, 12], qui consiste à approximer le noyau fractionnaire

$$K_H(t) = \frac{t^{H-\frac{1}{2}}}{\Gamma(H + \frac{1}{2})}$$

par une combinaison finie d'exponentielles :

$$K_H(t) \approx \sum_{j=1}^N w_j e^{-x_j t}.$$

On introduit alors N processus auxiliaires $(Y_t^{(j)})_{j=1,\dots,N}$ définis par

$$dY_t^{(j)} = -x_j Y_t^{(j)} dt + w_j \xi \sqrt{V_t} dW_t^V, \quad \text{avec} \quad V_t \approx \sum_{j=1}^N Y_t^{(j)}.$$

La variance devient ainsi une combinaison markovienne de processus d'Ornstein–Uhlenbeck, ce qui permet d'appliquer un schéma d'Euler–Maruyama standard pour simuler $(S_t, Y_t^{(1)}, \dots, Y_t^{(N)})$ sur une grille de discrétisation contenant explicitement les dates d'observation.

4.5 Comparaison des deux modèles

Nous avons utilisé les modèles LSV et rheston calibrés sur les options européennes afin de pricer les Athena

Le tableau 4 met en évidence les forces, faiblesses et contraintes opérationnelles des deux modèles, LSV et rHeston, en termes de complexité de calibration, coûts de calcul et simulation. Le modèle LSV offre un léger avantage en termes de qualité d'ajustement. Les différences restent cependant marginales, indiquant que les deux modèles parviennent à reproduire la surface de volatilité implicite de manière globalement satisfaisante. Toutefois, LSV reproduit mieux les maturités longues, tandis que Rough Heston fournit un meilleur ajustement en maturités courtes, cohérent avec la présence d'une volatilité plus "rugueuse" et réaliste à court terme (effet empirique bien documenté). Ainsi, les modèles sont comparables en précision globale, mais optimisés pour des zones différentes de la surface.

En termes de complexité numérique, les deux modèles présentent des contraintes fortes mais de nature différente. Le modèle LSV impose une chaîne de calcul particulièrement lourde : sa calibration requiert l'estimation conjointe des paramètres stochastiques de Heston et la construction de la surface de levier locale, ce qui conduit à un processus

d'optimisation complexe et coûteux. Ce caractère intensif se retrouve dans les temps de calcul. Le Rough Heston repose quant à lui sur la résolution d'équations de Riccati fractionnaires. Malgré l'existence d'une formule semi-fermée pour les calls, les calculs restent sensibles aux valeurs initiales et tout aussi exigeants, avec des temps d'exécution encore plus longs (30 heures dans les mêmes conditions).

Sur le volet simulation, la différence principale réside dans le coût par trajectoire. Le LSV bénéficie d'une dynamique simulable par des schémas relativement simples (type Euler), tandis que le Rough Heston nécessite un lifting markovien pour approximer le kernel fractionnaire, ce qui augmente significativement le nombre d'opérations par path. Cette surcharge se retrouve dans la vitesse de convergence : le LSV atteint une précision satisfaisante avec environ 5 050 trajectoires, alors que le Rough Heston en requiert environ 6 250, confirmant que la structure de volatilité rugueuse accroît le bruit de Monte Carlo et rallonge le temps nécessaire pour stabiliser les estimateurs.

TABLE 4 – Comparaison entre LSV et Rough Heston

Aspect	LSV (Local Stochastic Volatility)	Rough Heston
Qualité du fit (Calibration)	RMSE = 2.86 Ajustement plus précis pour les maturités <i>long termes</i>	RMSE = 2.93 Ajustement comparable ; colle mieux pour les <i>maturités courtes</i>
Complexité théorique du calibrage	Calibration = problème mathématique et numérique complexe . Estimation conjointe des paramètres de Heston + construction de la surface de levier. Requiert des itérations de Monte Carlo imbriquées \Rightarrow très coûteuses.	Calibration fondée sur la résolution des équations de Riccati fractionnaires. Présente une formule semi fermée pour le prix des calls. Calculs lourds et sensibles aux valeurs initiales.
Temps de calculs	23h (sur 2738 cotations ; CPU)	30h (mêmes conditions)
Simulation Complexité	: Chaque trajectoire est relativement simple (schéma d'Euler)	Simulation plus lourde (approximation du kernel par lifting \Rightarrow plus d'opérations par trajectoire)
Simulation Convergence	: Convergence avec \approx 5050 paths	Convergence avec \approx 6250 paths

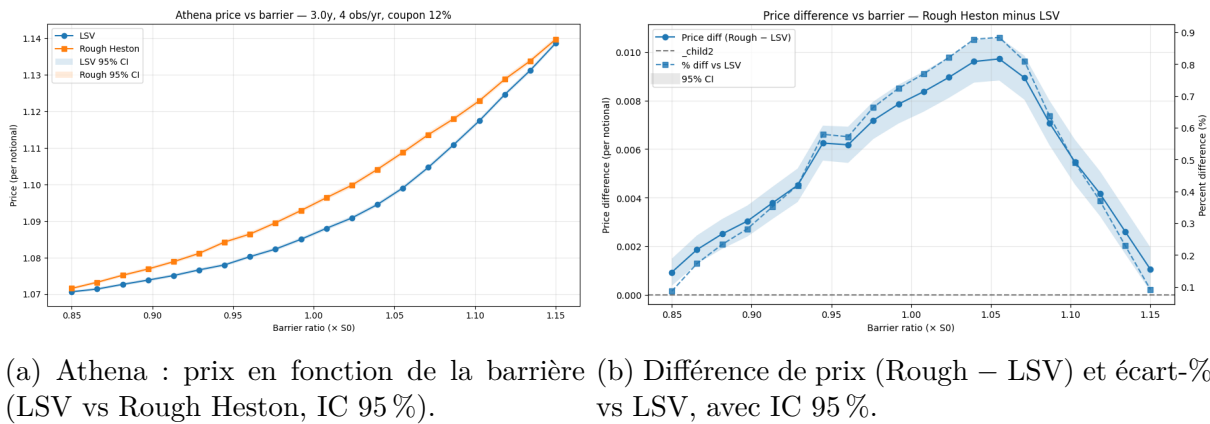


FIGURE 17 – Prix et écart de prix selon le niveau de barrière (3ans, 4 obs/an, coupon 12 %).

La figure 17b nous montre que le prix augmente de façon monotone et convexe avec la barrière pour les deux modèle. En effet, un seuil plus haut retarde l'autocall et accroît le coupon cumulé (coupon inconditionnel). Le rHeston est au-dessus de LSV sur toute la plage.

Une explication plausible est que sous Rough, la volatilité reste élevée plus longtemps après un drawdown (mémoire « rugueuse ») et la corrélation négative spot-vol renforce la skew à court terme. Cela réduit la probabilité de franchir tôt la barrière. À l'inverse, LSV reverse plus vite vers un régime plus calme, ce qui facilite les rattrapages rapides et donne une probabilité d'autocall plus élevée.

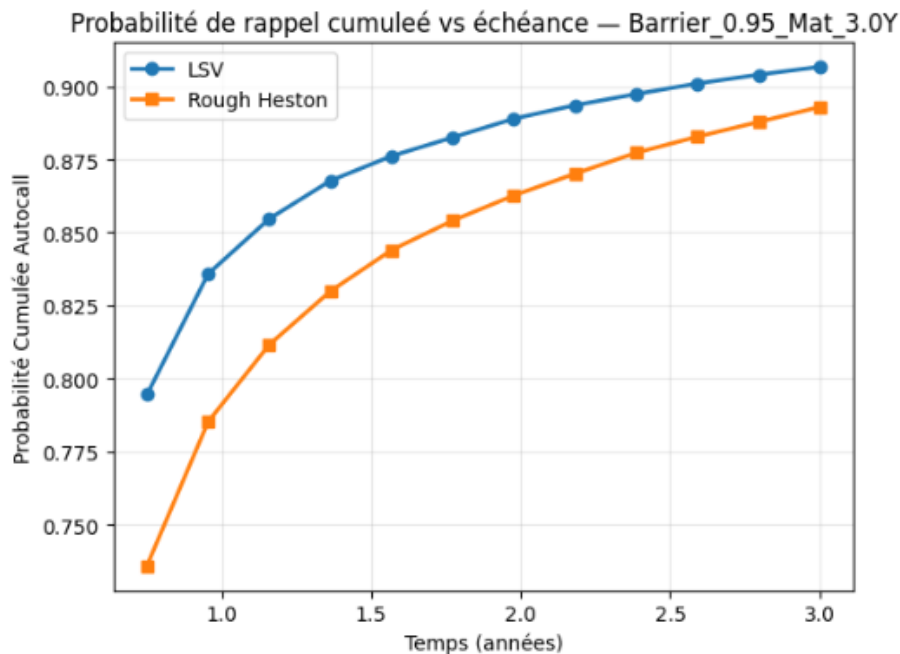


FIGURE 18 – Probabilité d'autocall *cumulative* (CDF) par date d'observation — LSV vs Rough.

La CDF LSV est au-dessus de Rough au début : LSV accumule plus vite les autocalls. En miroir, la survie $1 - \text{CDF}$ est plus élevée sous Rough, ce qui implique une espérance de temps d'appel plus grande et un prix plus élevé.

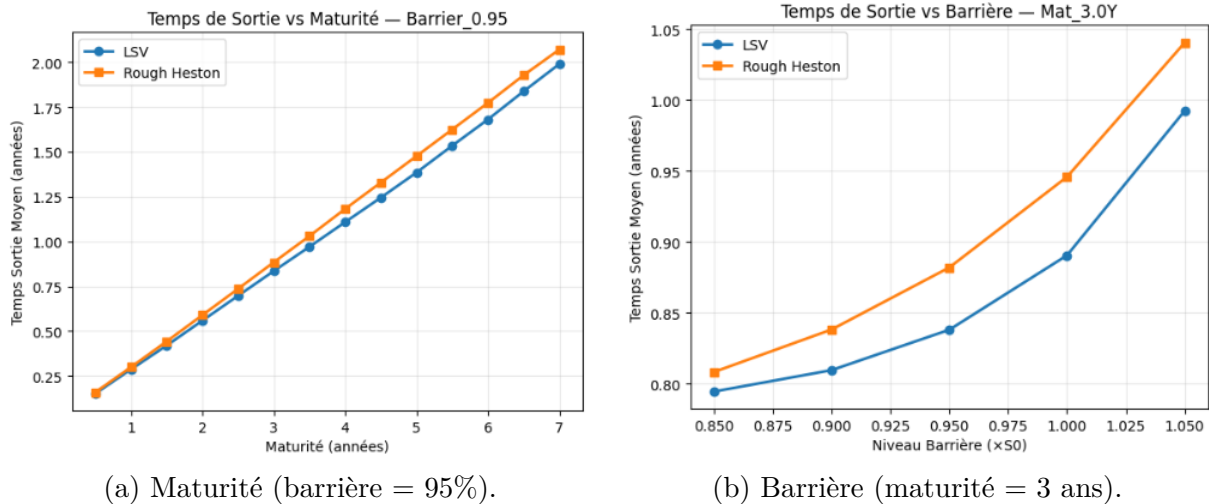


FIGURE 19 – Temps de sortie moyen : modèles LSV vs Rough Heston.

5 Conclusion

Dans ce papier, nous avons examiné en détail quatre classes de modèles : 1) la volatilité locale selon Dupire, 2) le modèle de Heston, 3) le modèle LSV (qui combine les deux modèles précédents) ainsi que le modèle 4) *rough* Heston afin de mesurer l'apport des modèles de volatilité *rugueuse* par rapport aux approches plus classiques de volatilité stochastique locale. Les modèles ont été calibrés sur des données réelles du S&P 500, ce qui permet d'évaluer leur capacité à reproduire fidèlement le smile implicite observé sur le marché et à valoriser avec précision des produits autocallables.

L'apport central réside dans la calibration opérationnelle du modèle *rough* Heston. Avec un exposant de Hurst calibré à $H = 0,2561$, cohérent avec la littérature, le modèle améliore l'ajustement *vanille* tout en conservant une structure semi-analytique exploitable. Techniquement, la résolution des équations de Riccati *fractionnaires* par schémas d'Adams–Bashforth–Moulton, couplée à une inversion FFT maîtrisée, transforme progressivement la volatilité rugueuse d'un concept académique en un outil exploitable.

Les résultats confirment une lecture désormais bien établie : chaque classe de modèle possède un domaine de validité. Les cadres classiques (LV, SV, LSV) demeurent des références robustes et bien comprises pour la majorité des usages. Les modèles rugueux apportent une sophistication utile lorsque la structure fine de la volatilité importe (maturités courtes, cohérence inter-dates du *smile*) et peuvent, dans le contexte des autocalls, affiner la valorisation et la gestion des risques entre dates de constatation.

L'analyse comparative reste incomplète. La calibration conduite sur un seul sous-jacent (S&P 500) restreint la portée externe des conclusions. De plus, la viabilité opérationnelle exige une maîtrise consolidée des contraintes numériques (FFT, régression conditionnelle, tolérances) et des coûts de calcul, même si des progrès encourageants ont été observés.

Malgré certaines limites, l'adoption industrielle des modèles *rough* progresse, bien que de manière prudente. Les difficultés liées aux calculs et à la validation tendent à s'atténuer grâce aux avancées récentes : schémas hybrides, liftings markoviens, calibration assistée par des algorithmes sophistiqués. Ces progrès rendent envisageable le passage des modèles *rough* de la théorie à la pratique, surtout lorsque leur réalisme apporte un bénéfice tangible.

Appendix

1 Théorème de Gyöngy

Soit Y_t un processus d'Itô en dimension finie,

$$dY_t = \beta(t, \omega) dt + \delta(t, \omega) dW_t,$$

où β et δ sont adaptés et bornés et où $\delta(t, \omega) \delta(t, \omega)^\top$ est uniformément définie positive. Alors il existe un processus markovien Z_t admettant une solution faible,

$$dZ_t = b(t, Z_t) dt + d(t, Z_t) dW_t,$$

tel que Z_t et Y_t aient la *même loi marginale* pour tout $t \geq 0$, avec

$$b(t, z) = \mathbb{E}[\beta(t, \omega) \mid Y_t = z], \quad d(t, z) d(t, z)^\top = \mathbb{E}[\delta(t, \omega) \delta(t, \omega)^\top \mid Y_t = z].$$

2 Extrait des données utilisées

TABLE 5 – Extrait de la chaîne d'options filtrée (12 premières lignes)

expiration	strike	last_price	bid	ask
2025-09-19	1400.0	0.125	0.05	0.20
2025-09-19	1600.0	0.175	0.10	0.25
2025-09-19	1800.0	0.275	0.25	0.30
2025-09-19	2000.0	0.300	0.25	0.35
2025-09-19	2200.0	0.450	0.40	0.50
2025-09-19	2300.0	0.550	0.50	0.60
2025-09-19	2400.0	0.650	0.60	0.70
2025-09-19	2500.0	0.775	0.70	0.85
2025-09-19	2600.0	0.875	0.80	0.95
2025-09-19	2700.0	1.025	0.95	1.10
2025-09-19	2800.0	1.150	1.10	1.20
2025-09-19	2900.0	1.325	1.25	1.40

3 Reproductibilité

Matériel et système

TABLE 6 – Configuration matérielle et système

Processeur	Intel Core i7-12650H (12 th Gen, 2,30 GHz)
Mémoire RAM	16 Go (15,6 Go utilisables)
Système	Windows 64 bits, architecture x64

Environnement Python

TABLE 7 – Versions des bibliothèques Python

Librairie	Version
Python	3.12.4
NumPy	2.2.6
SciPy	1.16.0
Pandas	2.3.0
Matplotlib	3.10.3
QuantLib	1.38
py_vollib	1.0.1
yfinance	0.2.63

4 Exemple de notice d'ABRC (BCV)

Source : Notice de cotation *Barrier Reverse Convertible Autocallable*, BCV, 22 janvier 2018. ISIN CH0398782687.

Barrier Reverse Convertible Autocallable²⁷

Underlyings: Novartis - Roche - Givaudan

Coupon: 5,30% p.a. - Autocall 100,00%

Barrier Cont. 65,00% - Maturity: 27 January 2020

This structured product is not a collective investment within the meaning of the Swiss Federal Investment Fund Act. It does not require approval from the Swiss Financial Market Supervisory Authority (FINMA) and is not subject to FINMA supervision. Investors are also exposed to the risk of insolvency of the issuer.

1. PRODUCT DESCRIPTION

Issue details

Sec. No. / ISIN / Symbol	39 878 268 / ISIN CH0398782687 / 0217BC
Issuer	Banque Cantonale Vaudoise, Lausanne Switzerland (S&P AA/stable)
Lead manager / Calculation agent / Paying agent	Banque Cantonale Vaudoise, Lausanne
Prudential supervision	BCV Lausanne, Switzerland, is subject to prudential supervision by Swiss Financial Market Supervisory Authority (FINMA).
Nominal amount	CHF 5 000
Issue size	200 Barrier Reverse Convertible Autocallable (includes an increase and reopening clause)
Minimum investment	CHF 5 000
Issue price	100,00%
Base currency	CHF
Distribution fees	No distribution fees
Initial fixing date	19 January 2018 (closing price of the underlying share(s) on the reference stock exchange)
Payment date	26 January 2018
Final fixing date	20 January 2020 (closing price of the underlying share(s) on the reference stock exchange)
Payout date	27 January 2020
Definition	The Autocallable Barrier Reverse Convertible is a structured product. It pays a guaranteed coupon throughout the product's lifetime (up to maturity or early redemption). This particular product will be redeemed before maturity under certain conditions. For early redemption to occur, each of the product's underlying assets must be above its Autocall Level.
SVSP-Classification	Yield enhancement – Barrier Reverse Convertible (1230), according to the Swiss Derivative Map available at www.svsp-verband.ch

Underlying

i	Name	ISIN Code	Reference Exchange	Initial Fixing (Si,0)
1	Novartis AG	CH0012005267	SIX Swiss Ex	83,38
2	Roche Holding AG	CH0012032048	SIX Swiss Ex	234,50
3	Givaudan SA	CH0010645932	SIX Swiss Ex	2 295,00

i	Barrier	Ratio	Early redemption level
1	54,197	59,96642	83,38
2	152,425	21,32196	234,50
3	1 491,750	2,17865	2 295,00

Product terms and conditions

Changes that are unplanned or not agreed	Information about any changes that are unplanned or not agreed contractually (e.g., capital transactions that affect the underlying assets such as splits, par-value reimbursements or conversions) shall be provided at www.bcv.ch/invest . To receive email alerts about these changes, you can sign up on the website and add this product to your favorites.
Strike level (K)	100,00% of the initial fixing
Barrier (B)	65,00% of the initial fixing
Type of Barrier	American (the price of each underlying asset on the reference stock exchange is observed continuously)
Early redemption level (autocall)	100,00% of the initial fixing
Worst-performing underlying asset	The worst-performing underlying asset is determined according to the following formula: $\text{Min}_i \left(\frac{S_{i,T}}{S_{i,0}} \right)$ where $S_{i,0}$ is the initial fixing for underlying i $S_{i,t}$ is the closing price of underlying i on the observation date
Coupon	5,30% p.a. The coupons will be paid in two tranches : 0,00% p.a. in interest 5,30% p.a. capital gain resulting from the option premium.
Coupon-Frequency	Half-yearly (2,65% per Period)
Coupon payment dates	Coupons payments will occur on the following dates : 26 July 2018 - 28 January 2019 - 26 July 2019 - 27 January 2020
Coupon calculation method	30/360, Modified following, unadjusted
Early redemption	If the worst-performing underlying asset is above its early redemption level on the observation date, the product expires immediately and the nominal amount is redeemed at 100%.
Early redemption observation dates	19 July 2018 - 21 January 2019 - 19 July 2019 - 20 January 2020
Early redemption dates	26 July 2018 - 28 January 2019 - 26 July 2019 - 27 January 2020

Bibliographie

- [1] Eduardo ABI JABER, Omar EL EUCH et Mathieu ROSENBAUM. “Markovian structure of the Volterra Heston model”. In : *Stochastic Processes and their Applications* 129.5 (2019), p. 1829-1863. DOI : [10.1016/j.spa.2018.06.008](https://doi.org/10.1016/j.spa.2018.06.008).
- [2] Rui ALBUQUERQUE, Raquel M. GASPAR et Allen MICHEL. “Investment Analysis of Autocallable Contingent Income Securities”. In : *Financial Analysts Journal* 71.3 (2015), p. 61-83. DOI : [10.2469/faj.v71.n3.4](https://doi.org/10.2469/faj.v71.n3.4). URL : <https://doi.org/10.2469/faj.v71.n3.4>.
- [3] Philippe BALLAND. “Deterministic implied volatility models”. In : *Quantitative Finance* 2.1 (2002), p. 31.
- [4] Christian BAYER, Peter K. FRIZ et Jim GATHERAL. “Pricing Under Rough Volatility”. In : *Quantitative Finance* 16.6 (2016), p. 887-904.
- [5] Christian BAYER et al. “Deep Calibration of Local–Stochastic Volatility Models”. In : *Quantitative Finance* (2023). DOI : [10.1080/14697688.2023.2261234](https://doi.org/10.1080/14697688.2023.2261234).
- [6] Fischer BLACK et Myron SCHOLES. “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”. In : *The Journal of Political Economy* 81.3 (1973), p. 637-654. URL : <https://www.journals.uchicago.edu/doi/10.1086/260062>.
- [7] Peter CARR et Dilip B. MADAN. “Option valuation using the fast Fourier transform”. In : *Journal of Computational Finance* 2.4 (1999), p. 61-73.
- [8] Muaz CHOWDHURY. “Mixed Local Volatility Models”. In : (2024). URL : https://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/faculty-of-natural-sciences/departement-of-mathematics/math-finance/239242778---Muaz-Chowdhury---Chowdhury_Muaz_02291903.pdf.
- [9] Emanuel DERMAN et Iraj KANI. “Riding on a smile”. In : *Risk* 9 (1994), p. 32-39.
- [10] Bruno DUPIRE. “Pricing with a smile”. In : *Risk* 7 (1994), p. 18-20.
- [11] Omar EL EUCH, Masaaki FUKASAWA et Mathieu ROSENBAUM. “The microstructural foundations of leverage effect and rough volatility”. In : *Finance and Stochastics* 22.2 (2018), p. 241-280.
- [12] Omar EL EUCH et Mathieu ROSENBAUM. “The characteristic function of rough Heston models”. In : *Mathematical Finance* 29.1 (2019), p. 3-38. DOI : [10.1111/mafi.12172](https://doi.org/10.1111/mafi.12172).
- [13] Omar EL EUCH et al. “The Zumbach effect under rough Heston”. In : *Quantitative finance* 20.2 (2020), p. 235-241.
- [14] Omar EL EUCH et Mathieu ROSENBAUM. “Perfect hedging in rough Heston models”. In : *The Annals of Applied Probability* 28.6 (2018), p. 3813-3856.

- [15] Walter FARKAS, Fabio FERRARI et Udo ULRYCH. “Pricing Autocallables under Local–Stochastic Volatility”. In : *Frontiers of Mathematical Finance* 1.4 (2022), p. 575-610. DOI : [10.3934/fmf.2022008](https://doi.org/10.3934/fmf.2022008).
- [16] Jim GATHERAL et Antoine JACQUIER. *Arbitrage-Free SVI Volatility Surfaces*. SSRN Working Paper No. 2033323. 2013. URL : <https://ssrn.com/abstract=2033323> (visité le 14/05/2025).
- [17] Jim GATHERAL, Thibault JAISSON et Mathieu ROSENBAUM. “Volatility is Rough”. In : *Quantitative Finance* 18.6 (2018), p. 933-949.
- [18] Jim GATHERAL et Martin KELLER-RESSEL. “Affine forward variance models”. In : *Finance and Stochastics* 23 (2019), p. 501-533.
- [19] Jim GATHERAL et Merrill LYNCH. *Lecture 4 : Barrier Options*. 2001.
- [20] Julien GUYON et Pierre HENRY-LABORDÈRE. “Being Particular about Calibration”. In : *Risk* 25.8 (2012), p. 62-67.
- [21] Imre GYÖNGY. “Mimicking the one-dimensional marginal distributions of processes having an Itô differential”. In : *Probability Theory and Related Fields* 71.4 (1986), p. 501-516. DOI : [10.1007/BF00699039](https://doi.org/10.1007/BF00699039).
- [22] Steven L. HESTON. “A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options”. In : *The Review of Financial Studies* 6 (1993), p. 327-343. URL : <https://academic.oup.com/rfs/article-abstract/6/2/327/1574747?redirectedFrom=fulltext>.
- [23] Mark JEX, Richard HENDERSON et Dan WANG. “Pricing Exotics under the Smile”. In : *Risk* 12 (1999), p. 72-75.
- [24] Alexander LIPTON. “The Vol Smile Problem”. In : *Risk* 15.2 (2002), p. 61-65.
- [25] MINGONE. “No Arbitrage Global Parametrization for the eSSVI Volatility Surface”. In : *arXiv preprint arXiv :2204.00312* (2022). URL : <https://arxiv.org/pdf/2204.00312>.
- [26] NMT. *Problems with Local Volatility Models vs Stochastic Volatility Models*. Quant Stack Exchange. Accessed : 2025-05-26. 2018. URL : <https://quant.stackexchange.com/q/39494>.