nexialog CONSULTING

NEXIASEARCH

Evaluation économique du risque lié aux avances sur polices d'assurance :

Cas d'un contrat mixte à garantie plancher

Raphaël KONAN

THINK SMART ACT DIFFERENT

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

L'environnement récent des taux bas a favorisé le retour en force des unités de compte dans des contrats d'épargne pourtant traditionnellement prudents.

Ce faisant, l'encours des contrats d'épargne est soumis à un risque de volatilité important sur le compartiment des unités de compte entièrement supporté par l'assuré.

En réalité, la plupart des contrats d'assurance-vie offre une garantie mixte : ils combinent une garantie en cas de vie au terme d'une phase de capitalisation (épargne) et une garantie en cas de décès (temporaire décès) au profit du bénéficiaire du contrat. La garantie en cas de décès inclut une option dite garantie plancher offrant la possibilité à l'assuré de protéger son investissement contre le risque de baisse des supports en unités de compte. En effet, lorsque l'assuré souscrit une clause de garantie plancher, l'assureur a l'obligation de garantir le versement d'un capital décès fixé au bénéficiaire du contrat. Ce capital est au moins égal au cumul des versements effectués par l'assuré, de son vivant, net des rachats préalablement effectués.

Par ailleurs, certains contrats d'épargne prévoient des facilités de crédit versées sous forme d'avances. L'assuré bénéficie alors de ce dispositif si les conditions générales du contrat d'épargne le permettent.

Le cadre réglementaire des avances est régi par le Code des Assurances à son article L.132-21. L'avance permet à l'assureur de prêter à l'assuré, contre paiement d'intérêts, une partie du capital acquis sur son contrat. L'idée de l'avance est donc de permettre à l'assuré de faire face à un imprévu (besoin ponctuel de liquidité). Ce qui évite à l'assuré de racheter son contrat et d'en conserver ainsi l'ancienneté (avantage fiscal).

En théorie, l'avance versée à l'assuré ne doit pas être plus élevée que la valeur de rachat du contrat (moins de 80 % des provisions mathématiques en euros et moins de 60 % en ce qui concerne les contrats en unités de compte). Cependant, certains assureurs peuvent se montrer plus accommodants avec leurs assurés en dépassant ces limites, par exemple, dans un souci de fidélisation (geste commercial). Il est aussi possible qu'un rachat partiel malencontreusement mal suivi survienne des années après l'octroi de l'avance, réduisant ainsi la valeur du capital garanti. Tant et si bien qu'en cas de décès de l'assuré, si le capital restant dû par ce dernier est plus grand que l'encours du contrat et la valeur du plancher, alors l'assureur perd une somme d'argent égale à la différence entre le capital restant dû et la valeur maximale entre l'encours de l'épargne et le plancher.

Dans cet article, nous proposons une évaluation économique du risque lié aux avances sur polices, dans le cadre d'un contrat mixte à garantie plancher en cas de décès.

Le risque lié aux avances sur polices d'assurance

Cadre de modélisation

Nous proposons une approche financière par formule fermée pour l'évaluation de ce risque.

Soient :

$t = 0$, la date de provisionnement du risque

A_0 , la valeur totale, à la date t = 0, de l'avance consentie à l'assuré.

$taux\_av$, le taux d'intérêt moyen du prêt ainsi octroyé.

T , une date de décès future probable de l'assuré

S_0 , le montant de la PM totale du contrat d'épargne à la date de provisionnement du risque

$S_0^{€}$, le montant de la PM Euro du contrat d'épargne

S_0^{UC} , le montant de la PM UC du contrat d'épargne. Par définition, $S_0 = S_0^{€} + S_0^{UC}$

Soit K le cumul à *t = 0* des cotisations versées par l'assuré nettes des rachats éventuels.

A la date de décès future probable *T*, le montant de l'avance consentie s'élève à (hypothèse prudente de non-remboursement entre 0 et *T)* :

$$A_T = A_0(1 + taux\_av)^T$$

Il vient alors que le risque auquel l'assureur s'expose en versant une avance au client s'écrit :

$$f_T = MAX(A_T \; - \; MAX(K \, ; S_T) \, ; \, 0)$$

L'expression f_T est la transcription analytique du principe suivant : l'assureur est en risque du fait de l'avance consentie au client dès lors que le montant de l'avance est plus grand que le capital à verser au bénéficiaire du contrat en cas de décès de l'assuré.

En effet, en cas de décès, si l'assuré bénéficie d'une garantie plancher, alors l'assureur doit verser la valeur de rachat du contrat $MAX(K \, ; S_T)$ au bénéficiaire du contrat. Et, si A_T est supérieur à $MAX(K \, ; S_T)$, alors l'assureur ne peut pas se rembourser totalement en puisant dans la valeur de rachat $MAX(K \, ; S_T)$.

On néglige ici le fait que l'assureur puisse exiger un remboursement total au bénéficiaire.

En général, l'avance est consentie pour 3 ans et reconductible par tacite reconduction. Dans l'étude, nous faisons l'hypothèse prudente de provisionnement selon laquelle l'avance est reconductible jusqu'à l'extinction du contrat.

Deux cas de figure se présentent à *T* :

<u>Cas 1</u> : le risque pour l'assureur est porté uniquement sur les supports en UC sans possibilité de le mutualiser avec le compartiment en €. Pour rappel, le risque dont il est question est celui que l'assuré décède à un moment où les UC sont en baisse et où le montant des avances est plus élevé que la part d'UC dans le capital décès *K* et la part d'UC dans la PM.

A *T*, le risque pour l'assureur vaut :

$$f_T = MAX(part\_UC \, * \, A_T \, - MAX(part\_UC \, * \, K \, ; \, S_T^{UC}) \, ; \, 0)$$

<u>Cas 2</u> : le risque sur les UC est mutualisable avec le compartiment en Euro

A *T*, le risque pour l'assureur vaut :

$$f_T = MAX(A_T \; - \; MAX(K \, ; \, S_T) \, ; \, 0)$$

$$f_T = MAX(A_T \; - \; S_T \; - \; MAX(K \; - \; S_T \, ; \, 0) \, ; \, 0)$$

$$f_T = MAX(A_T \; - \; S_T^{€} \; - \; S_T^{UC} - \; MAX(K \; - \; S_T^{€} \; - \; S_T^{UC} \, ; \, 0) \, ; \, 0)$$

En posant :

$K1 \; = \; A_T \; - \; S_T^{€}$ et $K2 = \; K \; - \; S_T^{€}$, il vient que :

$$\boldsymbol{f_T = MAX(\; K1 - S_T^{UC} \; - \; MAX(K2 - S_T^{UC} \, ; \, 0) \, ; \, 0)}$$

Dans la suite, nous nous focalisons sur le cas 2 qui est le cas le plus réaliste pour un assureur désirant récupérer les fonds prêtés en s'auto-remboursant sur la totalité de l'encours du contrat (€ + UC) au moment du décès de l'assuré.

Par ailleurs, du fait de la très faible volatilité des fonds en euros par rapport à la volatilité des UC, les strikes *K1* et *K2* seront supposés déterministes, dans un souci de simplification des calculs qui suivront.

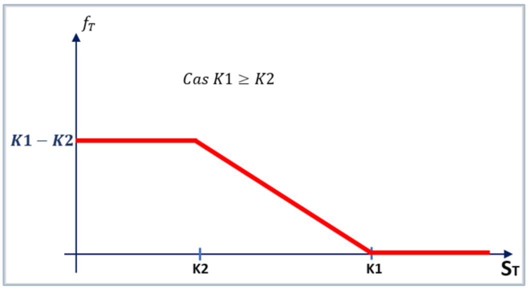
Quantification du risque

Evaluation du risque

D'après le cas 2 ci-dessus, à la date T du décès probable de l'assuré, l'exposition au risque d'avance pour l'assureur se traduit par :

$$f_T = MAX\left(K1 - S_T^{UC} - MAX\left(K2 - S_T^{UC} ; 0\right) ; 0\right)$$

- Lorsque $K1$ est inférieur ou égal à $K2$, alors le montant de l'avance est plus petit que le capital garanti. Dans ce cas, la perte est nulle pour l'assureur.
- Cas où K1 est supérieur ou égal à K2:



Lorsque $K1 \geq K2$, l'exposition au risque de l'assureur coïncide avec le *payoff* d'un *bear put spread*.

Un *bear put spread* est une combinaison de deux options de vente traditionnellement appelées *puts* : une position acheteuse (*long*) d'un *put* de *strike* $K1$ et une position vendeuse (*short*) d'un autre *put* de *strike* inférieur $K2$.

D'après l'analyse ci-dessus du risque f_T supporté par l'assureur à T, on a :

$$f_T = \begin{cases} 0 \text{ , si } K1 \leq K2 \text{ ou } K2 \leq K1 \leq S_T^{UC} \\ K1 - K2 \text{ , si } S_T^{UC} \leq K2 \leq K1 \\ K1 - S_T^{UC} \text{ , si } K2 \leq S_T^{UC} \leq K1 \end{cases}$$

Soit P(0,T) le zéro coupon de maturité T.

$$f_T = (K1 - K2) * 1_{\{K1 \geq K2\} \cap \{S_T^{UC} \leq K2\}} + (K1 - S_T^{UC}) * 1_{\{K2 \leq S_T^{UC} \leq K1\}}$$

$$f_T = (K1 - K2) * 1_{\{K1 \geq K2\}} 1_{\{S_T^{UC} \leq K2\}} + (K1 - S_T^{UC}) * 1_{\{K2 \leq S_T^{UC} \leq K1\}}$$

Soit Q la mesure de probabilité risque-neutre associée au zéro-coupon de maturité T.

Dans la suite, nous nous plaçons dans un cadre de modélisation de type Black-Scholes dans lequel les unités de comptes évoluent selon l'équation différentielle stochastique :

$\frac{dS_t^{UC}}{S_t^{UC}} = rdt + \sigma d\varepsilon_t$, σ la volatilité des UC, r leur rendement en univers risque-neutre et ε_t est un mouvement brownien.

<u>Calculons</u> $E_Q(f_T)$:

$$E_Q(f_T) = 1_{\{K1 \geq K2\}} * (K1 - K2) * N(-d_2^{K2})$$
$$+ E_Q\left((K1 - S_T^{UC}) * 1_{\{K2 \leq S_T^{UC} \leq K1\}}\right)$$

Car,

$$E_Q\left(1_{\{K1 \geq K2\}} * 1_{\{S_T^{UC} \leq K2\}}\right)$$
$$= 1_{\{K1 \geq K2\}} * Proba\left(S_T^{UC} \leq K2\right)$$
$$= 1_{\{K1 \geq K2\}} * N(-d_2^{K2})$$

Avec : $-d_2^{K2} = \frac{ln\left(\frac{K2}{S_0^{UC}}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{T}}$

Il s'en suit que (démonstration en annexes) :

$$\boldsymbol{E_Q(f_T)}$$
$$\boldsymbol{= 1_{\{K1 \geq K2\}} * (K1 - K2) * N\left(-d_2^{K2}\right) + K1 * \left(N\left(d2^{K2}\right) - N\left(d2^{K1}\right)\right) - S_0^{UC} e^{r\mathrm{T}} \left(N\left(d1^{K2}\right) - N\left(d1^{K1}\right)\right)}$$

Et donc que :

$$\boldsymbol{f_0 = e^{-r\mathrm{T}} \left(1_{\{K1 \geq K2\}} * (K1 - K2) * N\left(-d_2^{K2}\right) + K1 * \left(N\left(d2^{K2}\right) - N\left(d2^{K1}\right)\right)\right) - S_0^{UC} \left(N\left(d1^{K2}\right) - N\left(d1^{K1}\right)\right)}$$

Avec $K2 \leq K1$.

Le taux étant supposé constant, le prix $\boldsymbol{e^{-r\mathrm{T}}}$ du zéro-coupon coïncide avec le facteur d'actualisation.

Couverture du risque

Stratégie de couverture

- **Cas $K1 \leq K2$:**

Dans ce cas, aucune stratégie de couverture n'est requise car le risque pour l'assureur est nul. Pour rappel : $K1 \leq K2 \Leftrightarrow A_T \leq K$.

- **Cas $K2 \leq K1$**

Mise en place d'une stratégie de *box spread*.

Le *box spread* est une stratégie de couverture combinant un *bull spread* et un *bear spread*. Les options utilisées dans ce montage ont la même maturité. Concrètement, on fusionne un *bull spread* basé sur des *calls* avec un *bear spread* basé sur des *puts*.

Comme vu précédemment, le risque encouru par l'assureur coïncide avec le *payoff* d'un *bear put spread* lorsque $K2 \leq K1$.

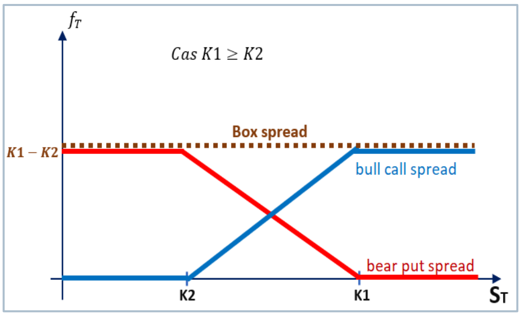
Le *box spread* apparaît ici comme une alternative aux moyens traditionnellement utilisés par l'assureur pour recouvrer son dû (exigence d'un remboursement au bénéficiaire désigné au contrat, …).

Pour implémenter la couverture, l'assureur pourrait mettre en place un *bull spread* dans lequel il achèterait un *call* et en vendrait un autre en se calant sur les maturités et *strikes* du *bear spread*.

Cette stratégie nécessiterait une mise de départ (de la part de l'assureur) dans la mesure où le *bull spread* sur *calls* induit une mise initiale. En effet, le montage du *bull spread* est fait de sorte que, d'une part, le *call* acheté soit de *strike K2* égal au *strike* du *put* vendu dans le *bear spread*. Et d'autre part, que le *call* vendu dans le *bull spread* soit de *strike K1* égal au *strike* du *put* acheté dans le *bear spread*.

A toute date de décès future probable T, la valeur du portefeuille ainsi constitué (*box spread*) vaut *K1 - K2*. **(E4)**

***Payoff* global de la stratégie *box spread* :**



Démonstration de **(E4)** :

Cas $K2 \leq K1$:

L'assureur achète en *t = 0* un *bull call spread* tel que décrit précédemment.

Le *payoff* en T de la stratégie *bull call spread* vaut :

$$f^{bull\ call\ spread}{}_T = MAX(S_T^{UC} - K2\,;\,0) - Max(S_T^{UC} - K1\,;\,0)$$

$$f^{box\ spread}{}_T = f^{risque\ assureur}{}_T + f^{bul\ call\ spread}{}_T$$

$$f^{box\ spread}{}_T = f_T + f^{bul\ call\ spread}{}_T$$

$$f^{box\ spread}{}_T = MAX\left(K1 - S_T^{UC} - MAX\left(K2 - S_T^{UC}; 0\right); 0\right) + MAX(S_T^{UC} - K2\,;\,0) - MAX(S_T^{UC} - K1\,;\,0)$$

$$f^{box\ spread}{}_T = \begin{cases} K1 - K2\,, si\ K1 \geq K2\ et\ S_T^{UC} \leq K2 \\ K1 - S_T^{UC}, si\ K2 \leq S_T^{UC} \leq K1 \\ 0, si\ K1 \geq K2\ et\ S_T^{UC} \geq K1 \end{cases} + \begin{cases} 0\,, si\ S_T^{UC} \leq K2 \leq K1 \\ S_T^{UC} - K2\,, si\ K2 \leq S_T^{UC} \leq K1 \\ K1 - K2\,, si\ K2 \leq K1 \leq S_T^{UC} \end{cases}$$

$$f^{box\ spread}{}_T = \begin{cases} K1 - K2\,, si\ S_T^{UC} \leq K2 \leq K1 \\ K1 - K2\,, si\ K2 \leq S_T^{UC} \leq K1 \\ K1 - K2\,, si\ K2 \leq K1 \leq S_T^{UC} \end{cases}$$

$$f^{box\ spread}{}_T = \mathbf{K1 - K2}$$

En *t = 0*, la stratégie ainsi montée vaut :

$$f^{box\ spread}{}_0 = \boldsymbol{e^{-rT}(K1 - K2)}$$

Risque sur le portefeuille assuré et Exemple d'application

Mesure du risque

Soient T_M, l'horizon de projection du risque et N le nombre d'assurés bénéficiant d'une avance sur police.

Soit x_i , $i \in [\![1,\ldots,N]\!]$, l'âge de l'assuré i du portefeuille.

Pour une date de décès future probable $T_m \leq T_M$ relative à l'assuré i, avec $m \in [\![1,\ldots,M]\!]$, nous désignons par ${f_0}^{(i)}$ et $\hat{f}^{(i)}{}_{T_m}$ respectivement les valeurs de f_0 et de $E_Q(f_{T_m})$ pour l'individu i.

D'après **(E3)** :

$$\hat{f}^{(i)}{}_{T_m} = \Big(1_{\{K1^{(i,Tm)} \geq K2^{(i,Tm)}\}} * \left(K1^{(i,Tm)} - K2^{(i,Tm)}\right) * N\left(-d_2^{K2^{(i,Tm)}}\right) + K1^{(i,Tm)} * \left(N\left(d2^{K2^{(i,Tm)}}\right) - N\left(d2^{K1^{(i,Tm)}}\right)\right)\Big) - S_0^{UC,i} * e^{r(T_m)*T_m} \left(N\left(d1^{K2^{(i,Tm)}}\right) - N\left(d1^{K1^{(i,Tm)}}\right)\right)$$

K1 et *K2* sont déterministes et spécifiques à chaque assuré, et $r(T_m)$ est un taux constant par maturité T_m découlant de la structure par termes des taux EIOPA.

La provision $Risk^{(assureur)}{}_i$ du risque de l'assureur découlant d'un décès probable de l'assuré débiteur i (en négligeant les rachats futurs) s'écrit de deux manières :

- Soit par actualisation des flux $\hat{f}^{(i)}{}_{T_m}$ en milieu d'année (période traditionnellement adoptée en assurance-vie pour le calcul des sinistres (décès) :

$$Risk^{(assureur)}{}_i = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{l_{x_i+T_m} - l_{x_i+T_{m+1}}}{l_{x_i}} * e^{-r(T_{m+1})*(T_m+0,5)} * 1_{\{K1^{(i,T_{m+1})} \geq K2^{(i,T_{m+1})}\}} * \hat{f}^{(i)}{}_{T_{m+1}}$$

Le facteur $1_{\{K1^{(i,Tm+1)} \geq K2^{(i,Tm+1)}\}}$se justifiant par le fait que $\hat{f}^{(i)}{}_{T_m}$ n'est différent de zéro que sous la contrainte $K1^{(i,Tm+1)} \geq K2^{(i,Tm+1)}$.

- Soit par actualisation des flux $\hat{f}^{(i)}{}_{T_m}$ en fin d'année :

$$Risk^{(assureur)}{}_i = \sum_{m=1}^{M} \frac{l_{x_i+T_{m-1}} - l_{x_i+T_m}}{l_{x_i}} * e^{-r(T_m)*T_m} * 1_{\{K1^{(i,T_m)} \geq K2^{(i,T_m)}\}} * \hat{f}^{(i)}{}_{T_m}$$

Le facteur $1_{\{K1^{(i,Tm)} \geq K2^{(i,Tm)}\}}$se justifiant par le fait que $\hat{f}^{(i)}{}_{T_m}$ n'est différent de zéro que sous la contrainte $K1^{(i,Tm)} \geq K2^{(i,Tm)}$.

Nous retenons la seconde approche car elle ne nécessite pas d'interpolation des taux sur les maturités (0,5 ; 1,5 ; 2,5 ; *etc*) inexistantes dans la courbe des taux EIOPA.

$$\boldsymbol{Risk^{(assureur)}{}_i = \sum_{m=1}^{M} \frac{l_{x_i+T_{m-1}} - l_{x_i+T_m}}{l_{x_i}} * e^{-r(T_m)*T_m} * 1_{\{K1^{(i,T_m)} \geq K2^{(i,T_m)}\}} * \hat{f}^{(i)}{}_{T_m}}$$

$$\boldsymbol{Risk^{(assureur)}{}_i = \sum_{m=1}^{M} \frac{l_{x_i+T_{m-1}} - l_{x_i+T_m}}{l_{x_i}} * e^{-r(T_m)*T_m} * 1_{\{K1^{(i,Tm)} \geq K2^{(i,Tm)}\}} \left(\left(\left(K1^{(i,Tm)} - K2^{(i,Tm)}\right) * N\left(-d_2^{K2^{(i,Tm)}}\right) + K1^{(i,Tm)} * \left(N\left(d2^{K2^{(i,Tm)}}\right) - N\left(d2^{K1^{(i,Tm)}}\right)\right)\right) - S_0^{UC,i} * e^{r(T_m)*T_m} \left(N\left(d1^{K2^{(i,Tm)}}\right) - N\left(d1^{K1^{(i,Tm)}}\right)\right)\right)}$$

$Risk^{(assureur)}{}_i \geq 0$, car découlant d'une fonction partie positive : *MAX(x;0)* = $x^+ \geq 0$.

La provision totale $Risk^{(assureur)}{}_{total}$vaut :

$$\boldsymbol{Risk^{(assureur)}{}_{total} = \sum_{i=1}^{N} Risk^{(assureur)}{}_i}$$

$$\boldsymbol{= \sum_{i=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \frac{l_{x_i+T_{m-1}} - l_{x_i+T_m}}{l_{x_i}} * e^{-r(T_m)*T_m} * 1_{\{K1^{(i,Tm)} \geq K2^{(i,Tm)}\}} \left(\left(\left(K1^{(i,Tm)} - K2^{(i,Tm)}\right) * N\left(-d_2^{K2^{(i,Tm)}}\right) + K1^{(i,Tm)} * \left(N\left(d2^{K2^{(i,Tm)}}\right) - N\left(d2^{K1^{(i,Tm)}}\right)\right)\right) - S_0^{UC,i} * e^{r(T_m)*T_m} \left(N\left(d1^{K2^{(i,Tm)}}\right) - N\left(d1^{K1^{(i,Tm)}}\right)\right)\right)}$$

Mesure du risque assuré et Exemple d'application

Exemple d'application

Enoncé

Dans cette partie, nous considérons un portefeuille fictif de contrats d'épargne investis en euros et en UC. Le portefeuille est considéré fermé et projeté en run-off.

Le tableau ci-dessous récapitule les caractéristiques du portefeuille illustratif.

Nous considérons une base de 10 assurés d'âges situés entre 20 et 65 ans.

Par hypothèse, nous ne projetons pas les primes futures, les assurés ne rachètent pas leurs contrats et le capital décès demeure inchangé au fil du temps (hypothèses prudentes).

Pour chaque assuré, nous admettons que le taux minimum garanti annuel (TMGA) sur le fonds euros est égal au taux d'intérêt de l'avance octroyée et que la PB versée au titre du contrat, de même que les frais de gestion sont nuls.

Numéro assuré *(i)*	Age (x_i)	Duration (T_M)	PM Totale (S)	%PM Euros $S_0^{€,i}$	%PM UC (CAC 40) $S_0^{UC,i}$	Avances A_0	% Intérêt *taux_av*	Temporaire décès	Garantie plancher	Capital décès (K)	Limite âge garantie
1	20	50	3 172 000	65%	35,00%	3 600 000	1,5%	oui	oui	3 000 000	70
2	25	45	2 953 000	65%	35,00%	3 200 000	1,5%	oui	oui	4 000 000	70
3	30	40	4 389 000	65%	35,00%	2 500 000	1,5%	oui	oui	5 000 000	70
4	35	35	4 793 000	65%	35,00%	7 500 000	1,5%	oui	oui	5 000 000	70
5	40	30	7 060 000	70%	30,00%	8 800 000	1,5%	oui	oui	8 000 000	70
6	45	25	6 757 000	70%	30,00%	5 250 000	2%	oui	oui	5 000 000	70
7	50	20	7 237 000	70%	30,00%	6 600 000	2%	oui	oui	6 000 000	70
8	55	15	10 845 000	70%	30,00%	9 600 000	2%	oui	oui	8 000 000	70
9	60	10	11 928 000	90%	10,00%	4 800 000	3%	oui	oui	12 000 000	70
10	65	5	12 192 000	90%	10,00%	2 000 000	3%	oui	oui	10 000 000	70

Les avances sont consenties pour 3 ans, reconductibles par tacite reconduction. Nous ferons donc l'hypothèse prudente que les avances sont reconductibles jusqu'à l'extinction des contrats.

Pour l'évaluation du risque, nous utilisons la table TH00-02 en raison de sa prudence pour l'évaluation des garanties temporaires décès.

Les UC sont investies dans le CAC40 et nous utiliserons la volatilité implicite de cet indice au 30/06/2022 pour sa projection (volatilité implicite CAC40 = 29.54%). Pour le calcul des facteurs d'actualisation, nous recourons à la courbe des taux EIOPA disponible au 30/06/2022.

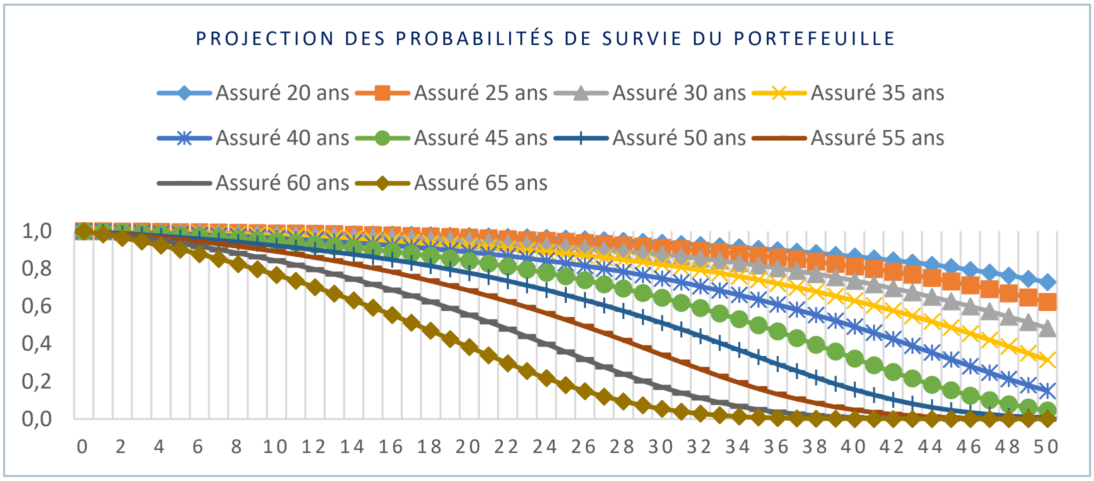
Mesure du risque assuré et Exemple d'application

Exemple d'application

Résultats

Le graphique ci-dessous compare les probabilités de survie projetées des assurés du portefeuille étudié.

On observe une décroissance logique des probabilités, à mesure que l'âge augmente. Ce qui signifie que, toutes choses égales par ailleurs, le risque subi par l'assureur est porté par les assurés les plus âgés.



- ❑ La provision (en €) pour risque d'avances sur polices, obtenue par tête assurée, est donnée par le tableau suivant :

Numéro assuré *(i)*	Age *(xi)*	Exposition au risque par assuré sur 50 ans *(Limite âge garantie - Age minimum du portefeuille = 50 ans)*	K 1 ≥ K2 (sur quelle fenêtre de projection ?)	K 2 ≥ K1 (sur quelle fenêtre de projection ?)
1	20	275 524	[1 ; 50]	Jamais
2	25	114 452	[15 ; 45]	[1 ; 14]
3	30	0	Jamais	[1 ; 40]
4	35	736 032	[1 ; 35]	Jamais
5	40	537 096	[1 ; 30]	Jamais
6	45	312 212	[1 ; 25]	Jamais
7	50	363 060	[1 ; 20]	Jamais
8	55	507 816	[1 ; 15]	Jamais
9	60	0	Jamais	[1 ; 10]
10	65	0	Jamais	[1 ; 5]

- Pour les assurés d'âges 30, 60 et 65 ans, le risque encouru par l'assureur est nul car les avances consenties sont inférieures au plancher (i.e., K2 ≥ K1). Cela est vrai pour toutes les années de projection, jusqu'à l'âge limite de la garantie décès.
- Bien qu'ayant une avance inférieure au plancher, l'assuré d'âge 25 ans présente un risque pour l'assureur car à partir de la 15ème année de projection, le strike K1 devient supérieur au strike K2 (hypothèse prudente d'avances capitalisées et de planchers constants).
- Pour tous les autres assurés, on se retrouve dans le cas K1 ≥ K2, sur tout l'horizon de projection.
- Au total, la provision pour risque d'avance calculée sur l'ensemble du portefeuille s'élève à 2 846 193 €.

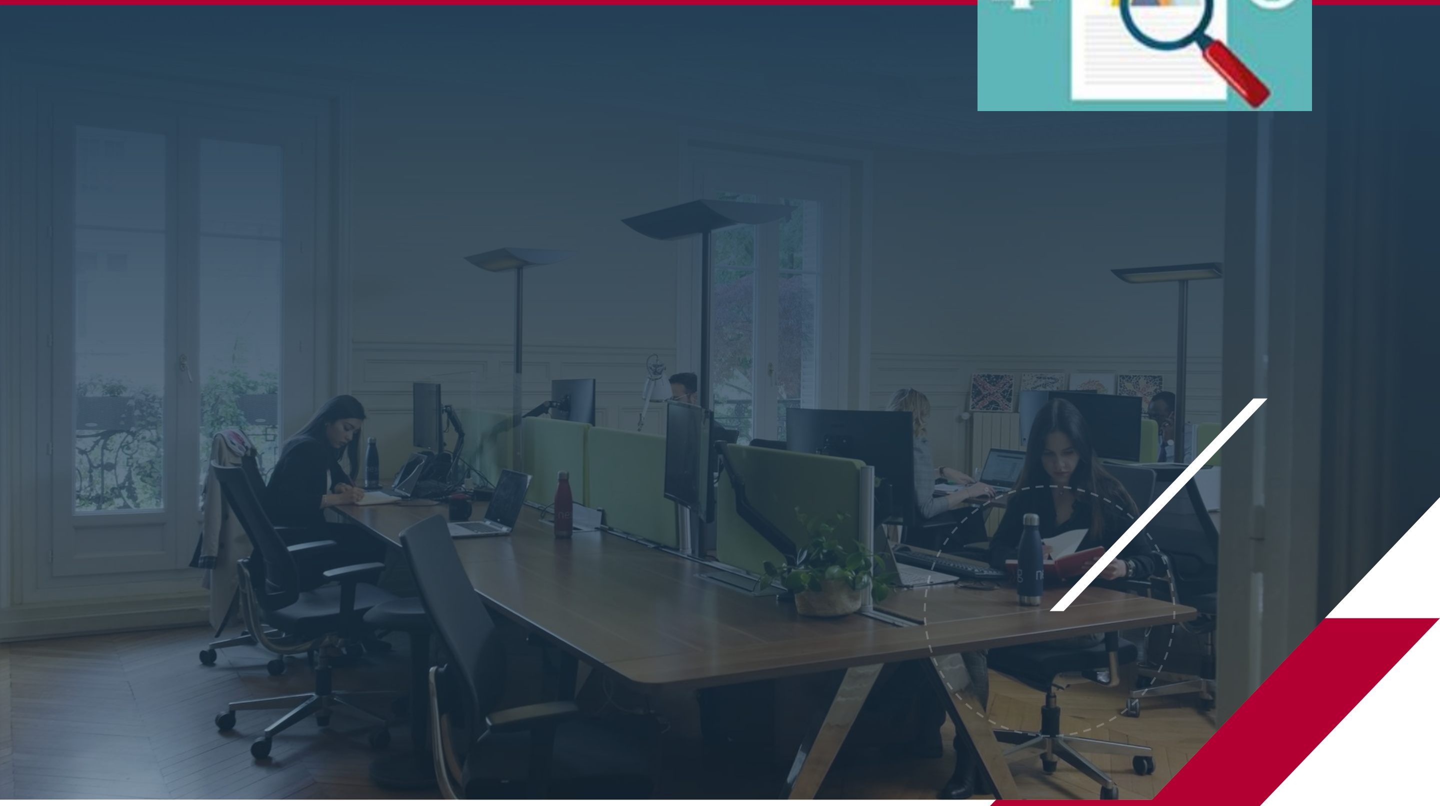
Conclusion

L'avance sur police représente une facilité de crédit intéressante pour l'assuré. Elle lui permet de répondre à un besoin de liquidité urgent tout en conservant l'ancienneté fiscale du contrat d'assurance-vie. L'avance évite aussi à l'assuré de payer les impôts sur plus-values éventuelles exigibles dans le cadre d'un rachat.

L'étude rappelle que, quel que soit l'état du marché des unités de compte, il suffirait que le cumul des cotisations (K) nettes de rachat soit supérieur au cumul des sommes avancées (intérêts compris) pour que le risque lié aux avances soit endigué. En effet, dans ce cas de figure, l'assureur pourrait se rembourser en se servant directement dans la somme K.

Autrement, le risque auquel s'expose l'assureur, pour un assuré donné, est quantifiable par le *payoff* d'un *bear put spread* de maturité la date de décès future probable de l'assuré. Dans ce cas, il est possible de couvrir le risque en mettant en place une stratégie de type *box spread*.

La stratégie *box spread* nécessite une mise initiale car elle résulte de la combinaison d'un *bull call spread* et d'un *bear put spread*. Le *bull call spread* est une position *long* (acheteuse) d'un *call* de *strike* $K2$ et *short* (vendeuse) d'un *call* de *strike* $K1 > K2$. Le *bull call spread* nécessite donc un coût d'entrée car l'option vendue est moins dans la monnaie (et coûte donc moins chère) que l'option achetée. Par ailleurs, dans un *bear put spread*, le *put* vendu, de *strike* $K2$, est moins dans la monnaie (et coûte donc moins chère) que le *put* acheté (de *strike* $K1 > K2$). La mise en place d'une telle couverture, contrat par contrat ou model point par model point, serait fastidieuse voire impossible à implémenter pour l'assureur. Il gagnerait donc à constituer des macro-groupes de contrats homogènes présentant le même profil de risque.



Annexes : Démonstration de la valeur de $E_Q(f_T)$

Posons,

$$A = E_Q\left((K1 - S_T^{UC}) * 1_{\{K2 \le S_T^{UC} \le K1\}}\right)$$

$$A = K1 * E_Q\left(1_{\{K2 \le S_T^{UC} \le K1\}}\right)$$

$$-E_Q\left(S_T^{UC} * 1_{\{K2 \le S_T^{UC} \le K1\}}\right)$$

$$A = K1 * Proba(K2 \le S_T^{UC} \le K1)$$

$$-E_Q\left(S_T^{UC} * 1_{\{K2 \le S_T^{UC} \le K1\}}\right)$$

Comme $0 \le K2 \le S_T^{UC} \le K1$ et

$S_T^{UC} = S_0^{UC} * e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{T} + \sigma\sqrt{T}*\varepsilon}$, $\varepsilon \sim$ N (0,1) **(E1)**

Alors :

$ln\left(\frac{K2}{S_0^{UC}*e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{T}}}\right) \le \sigma\sqrt{\mathrm{T}} * \varepsilon \le ln\left(\frac{K1}{S_0^{UC}*e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{T}}}\right)$, ln fonction croissante

$$\underbrace{\frac{ln\left(\frac{K2}{S_0^{UC}}\right)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{T}}}_{-d2^{K2}} \le \varepsilon \le \underbrace{\frac{ln\left(\frac{K1}{S_0^{UC}}\right)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{T}}}_{-d2^{K1}}$$

(E2)

Donc :

$$A = K1 * \mathrm{Prob}(-d2^{K2} \le \varepsilon \le -d2^{K1}) - E_Q\left(S_T^{UC} * 1(S_T^{UC})_{\{K2 \le S_T^{UC} \le K1\}}\right)$$

$A = K1 * \left(N(-d2^{K1}) - N(-d2^{K2})\right) - E_Q\left(S_T^{UC} * 1(S_T^{UC})_{\{K2 \le S_T^{UC} \le K1\}}\right)$, N fonction de répartition de ε.

$$\mathrm{A} = K1 * \left(N(d2^{K2}) - N(d2^{K1})\right)$$

$$-E_Q\left(S_T^{UC} * 1(S_T^{UC})_{\{K2 \le S_T^{UC} \le K1\}}\right)$$

<u>Que vaut</u> $E_Q\left(S_T^{UC} * 1(S_T^{UC})_{\{K2 \le S_T^{UC} \le K1\}}\right)$?

$$E_Q\left(S_T^{UC} * 1(S_T^{UC})_{\{K2 \le S_T^{UC} \le K1\}}\right)$$

$= S_0^{UC} e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T} E_Q\left(e^{\sigma\sqrt{T}\,\varepsilon} * 1(\varepsilon)_{[-d2^{K2}, -d2^{K1}]}\right)$, d'après **(E1)**

$= S_0^{UC} * e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{T}} \int_{-d2^{K2}}^{-d2^{K1}} e^{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}\,\varepsilon}\, dN_\varepsilon$, N fonction de répartition de ϵ

$$= S_0^{UC} * e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T} \int_{-d2^{K2}}^{-d2^{K1}} e^{\sigma\sqrt{T}\,\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} d\varepsilon$$

$= S_0^{UC} e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d2^{K2}}^{-d2^{K1}} e^{-\frac{(\varepsilon - \sigma\sqrt{T})^2 - \sigma^2\mathrm{T}}{2}} d\varepsilon$, par la

forme canonique de $\varepsilon^2 - 2\sigma\sqrt{T}\,\varepsilon$

$$= S_0^{UC} e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T} e^{\frac{\sigma^2\mathrm{T}}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d2^{K2}}^{-d2^{K1}} e^{-\frac{(\varepsilon - \sigma\sqrt{T})^2}{2}} d\varepsilon$$

Posons : $-w = (\varepsilon - \sigma\sqrt{T})$

Alors,

$$\begin{cases} -dw = d\varepsilon \\ \varepsilon = -d2^{K2} \Rightarrow w = \left(d2^{K2} + \sigma\sqrt{T}\right) \\ \varepsilon = -d2^{K1} \Rightarrow w = \left(d2^{K1} + \sigma\sqrt{T}\right) \end{cases}$$

$$E_Q\left(S_T^{UC} * 1(S_T^{UC})_{\{K2 \le S_T^{UC} \le K1\}}\right)$$

$$= S_0^{UC} e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{T}} e^{\frac{\sigma^2\mathrm{T}}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d2^{K2}+\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}^{d2^{K1}+\sigma\sqrt{\mathrm{T}}} e^{-\frac{(-w)^2}{2}} (-dw)$$

$$= \underbrace{S_0^{UC} e^{r\mathrm{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d2^{K1}+\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}^{d2^{K2}+\sigma\sqrt{\mathrm{T}}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw}_{\ge 0 \; car \; S_0^{UC} \ge 0 \; et \; d2^{K1} \le d2^{K2}}$$

$$= S_0^{UC} e^{r\mathrm{T}} \left(N\left(d2^{K2} + \sigma\sqrt{\mathrm{T}}\right) - N\left(d2^{K1} + \sigma\sqrt{\mathrm{T}}\right)\right)$$

$$= S_0^{UC} e^{r\mathrm{T}} \left(N(d1^{K2}) - N(d1^{K1})\right)$$

Par conséquent,

$$A = K1 * \left(N(d2^{K2}) - N(d2^{K1})\right) - S_0^{UC} e^{r\mathrm{T}} \left(N(d1^{K2}) - N(d1^{K1})\right)$$

C'est-à-dire que :

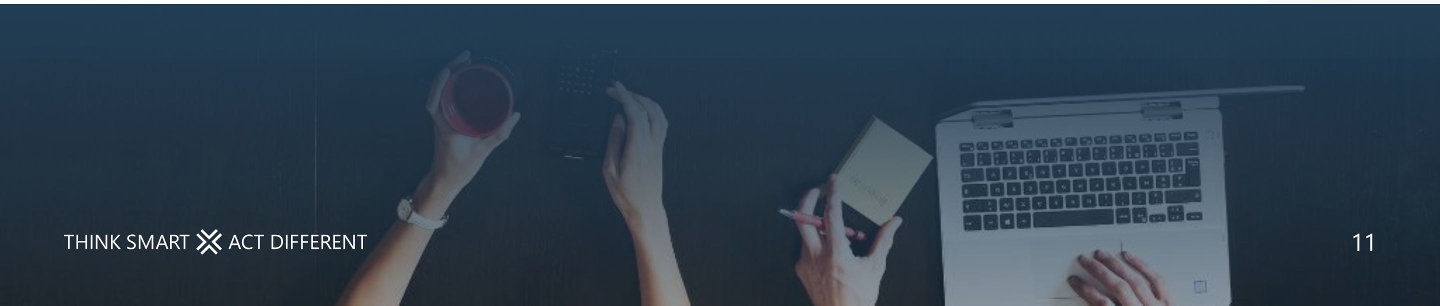
$\boldsymbol{E_Q(f_T)}$

$$\boldsymbol{= 1_{\{K1 \ge K2\}} * (K1 - K2) * N\left(-d_2^{K2}\right) + K1 * \left(N\left(d2^{K2}\right) - N\left(d2^{K1}\right)\right) - S_0^{UC} e^{r\mathrm{T}} \left(N\left(d1^{K2}\right) - N\left(d1^{K1}\right)\right)} \quad \textbf{(E3)}$$

Et, finalement :

$$\boldsymbol{f_0 = e^{-r\mathrm{T}} \left(1_{\{K1 \ge K2\}} * (K1 - K2) * N\left(-d_2^{K2}\right) + K1 * \left(N\left(d2^{K2}\right) - N\left(d2^{K1}\right)\right)\right) - S_0^{UC} \left(N\left(d1^{K2}\right) - N\left(d1^{K1}\right)\right)}$$

Le taux étant supposé constant, le prix $\boldsymbol{e^{-r\mathrm{T}}}$ du zéro-coupon coïncide avec le facteur d'actualisation.



Sources

- https://www.legifrance.gouv.fr/codes/section_lc/LEGITEXT000006073984/LEGISCTA000006174038/?anchor=LEGIARTI000030461815#LEGIARTI000030461815
- https://baronpatrimoine.com/2014/08/04/disponibilite-de-lepargne-acquise/
- https://www.cieleden.com/assurance-vie/sorties/les-avances/
- http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/8d48b7680058e977c1256d65003ecbb5/0f2fbfe501869e80c125755d004ea28b/$FILE/M%C3%A9moire%20Garanties%20plancher.pdf, Sylvain MERLUS, Olivier PEQUEUX

  Les garanties plancher des contrats d'assurance-vie en unites de compte : tariffication et couverture
- http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/d512ad5b22d73cc1c1257052003f1aed/264b3a89f8f754b2c12579d9000f82de/$FILE/ATTM91LH.pdf/Memoire%20PRINGAULT%20Manuel.pdf, Manuel PRINGAULT

  Modélisation du comportement des assurés d'un portefeuille épargne et application au travers d'un calcul de coût d'une garantie plancher
- Options, futures, and other derivatives, sixth edition, John C. Hull
- https://www.researchgate.net/publication/242603416_Box_Spread_Strategies_and_Arbitrage_Opportunities
- https://pdfs.semanticscholar.org/32ed/1c7c1f5488fa0db48c333017bb98f3998a4e.pdf
- http://www.thesaurus.fr/avance-sur-police-assurance-vie_916
- https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/media/2017/08/18/201007-principes-sectoriels-acp-blanchiment-assurances.pdf
- https://optimial.fr/assurance-vie-lavance-possibilite-certainement-obligation-lassureur/
- https://www.capital.fr/votre-argent/avance-assurance-vie-1374427

Nexialog Consulting

STRATÉGIE | ACTUARIAT | GESTION DES RISQUES

Nexialog Consulting est un cabinet de conseil spécialisé en Stratégie, Actuariat et Gestion des risques qui dessert aujourd'hui les plus grands acteurs de la banque et de l'assurance. Nous aidons nos clients à améliorer de manière significative et durable leurs performances et à atteindre leurs objectifs les plus importants.

Les besoins de nos clients et les réglementations européennes et mondiales étant en perpétuelle évolution, nous recherchons continuellement de nouvelles et meilleures façons de les servir. Pour ce faire, nous recrutons nos consultants dans les meilleures écoles d'ingénieur et de commerce et nous investissons des ressources de notre entreprise chaque année dans la recherche, l'apprentissage et le renforcement des compétences.

Quel que soit le défi à relever, nous nous attachons à fournir des résultats pratiques et durables et à donner à nos clients les moyens de se développer.

CONTACTS

Ali BEHBAHANI
Associé, Fondateur
+ 33 (0) 1 44 73 86 78
abehbahani@nexialog.com

www.nexialog.com

Retrouvez toutes nos publications sur Nexialog R&D

Christelle BONDOUX
Associée, Directrice commerciale
+ 33 (0) 1 44 73 75 67
cbondoux@nexialog.com

Areski COUSIN
Directeur Scientifique R&D
acousin@nexialog.com

Habib FAYE
Manager R&D Actuariat
hfaye@nexialog.com

Antoine CARRICANO
Account Manager – Actuariat Conseil
+ 33 (0)1 44 73 75 66
+ 33 (0)6 25 60 98 61
acarricano@nexialog.com

Raphael KONAN
Senior Manager – Actuariat Conseil
+33 (0)7 48 13 28 71
rkonan@nexialog.com