

Calcul dynamique du SCR en formule standard à base d'apprentissage automatique et interprétabilité des modèles utilisés

Nexialog Consulting, Paris, France

17 mai 2022



Résumé

Dans le cadre de la directive solvabilité II, les compagnies d'assurance sont amenées à déterminer leur capital économique ajusté aux risques qu'elles encourent. Deux types d'approches sont envisageables pour le calcul de ce capital : l'application de la formule standard, reposant sur l'agrégation de besoins en capital élémentaires à partir de matrices de corrélation, ou le recours à un modèle interne, mieux adapté au profil de risque de la compagnie. La mise en place de ces deux approches relève d'une complexité numérique d'autant plus importante que la production des rapports réglementaires (QRT, étude de sensibilité, ORSA, . . .) se fait de manière trimestrielle. Dans cet article, nous étudions la piste de la méta-modélisation pour le calcul de ce capital en formule standard. En effet, à partir d'un modèle ALM et des évaluations de fonds propres économiques qui en résultent sur une base d'apprentissage judicieusement construite, nous mettons en place une procédure permettant un pilotage des risques beaucoup plus réactif en s'appuyant sur des techniques d'apprentissage automatique. En effet le méta-modèle mis en place dans notre étude permet non seulement de calculer efficacement les fonds propres économiques pour différents scénarios économiques mais aussi d'estimer la sensibilité de ces fonds propres par rapport aux différents facteurs de risque. Cette approche permet d'évaluer la solvabilité à n'importe quel instant et en particulier pendant les périodes de forte volatilité dans l'optique d'orienter plus efficacement la politique de gestion des risques. De plus, nous proposons d'interpréter les méta-modèles étudiés à l'aide de valeurs de Shapley et d'indices de Sobol, qui permettent d'identifier les facteurs qui influencent le plus la volatilité des fonds propres économiques et donc du SCR.

Table des matières

Introduction	3
1 Organisation de l'étude	4
2 Construction de la base d'apprentissage	4
2.1 Portefeuille étudié	4
2.2 Facteurs de risque	5
2.3 Projection sur un an du modèle ALM implémenté	5
2.4 Mise en place de la base de données	7
2.4.1 Motivation	9
3 Mode opératoire	10
3.1 Découpage de la base d'apprentissage	10
3.2 Algorithmes testés	10
3.3 Critères de comparaison	10
4 Interprétation des modèles	11
4.1 SHapley Additive exPlanations pour l'interprétation des modèles de ML	11
4.2 Analyse de sensibilité par krigeage	12
5 Présentation et interprétation des résultats pour les algorithmes retenus	15
5.1 Régression polynomiale	15
5.2 Régression Ridge	18
5.3 Random Forest	20
5.4 Xgboost	22
5.5 Régression par processus gaussien	25
5.6 Récapitulatif des différents algorithmes utilisés sur la base test	27
6 Conclusion	28
7 Annexes	30
Contacts	38

Introduction

La solvabilité d'un assureur est sa capacité à respecter les engagements qu'il prend à l'égard de ses clients en évaluant l'adéquation entre les risques liés à l'activité d'assurance et le capital alloué pour couvrir ces mêmes risques. Afin de garantir cette solvabilité, les sociétés d'assurances doivent disposer :

- de réserves couvrant l'intégralité des engagements souscrits vis-à-vis des assurés
- de fonds propres économiques suffisants pour faire face à des événements imprévus pouvant impacter le respect de leurs engagements (paiement des prestations, participation aux bénéfiques, intérêts techniques. . . .)

Pour les fonds propres économiques, la réglementation oblige les compagnies à détenir un montant de fonds propres économiques qui est au minimum équivalent au SCR. En effet le SCR est le niveau de capital ou de fonds propres économiques nécessaire pour que l'entreprise d'assurance ou de réassurance absorbe un risque majeur. Ce capital incorpore tous les risques liés à l'activité de la société d'assurance (risque de marché, risque de souscription, . . .). La réglementation Solvabilité 2 édicte les modalités de calcul de ce capital requis via deux approches d'évaluation :

- la formule standard : basée sur des chocs de risque déjà calibrés par la réglementation.
- le modèle interne : utilisé par les assureurs pour une meilleure maîtrise de leurs risques, ce modèle permet de réduire le coût d'immobilisation en capital mais il est complexe à mettre en œuvre (on peut être en formule standard et avoir une meilleure maîtrise de ses risques qu'un autre assureur en modèle interne mais l'exercice de mise en place d'un modèle interne total ou partiel nécessite une meilleure connaissance de ses propres risques.)

La complexité de mise en place de ces différentes approches (modèle interne et formule standard) accroît la difficulté des compagnies d'assurance dans la production trimestrielle des rapports réglementaires. Certains travaux ont été réalisés dans le but de rendre moins complexe les calculs réglementaires pour les compagnies d'assurance. Parmi ces derniers, on peut citer [Devineau and Loisel \(2009\)](#), [Croix \(2015\)](#), [Messoussi \(2017\)](#), [Gauville \(2018\)](#).

Cette étude s'inscrit dans la suite des travaux réalisés par le cabinet Nexialog. En effet, l'article [R&D Nexialog \(2021\)](#) traitait de méta-modélisation à l'aide de technique de krigeage stochastique dans le contexte d'un SCR calculé en modèle interne. Cependant dans la présente étude, nous proposons une approche différente de méta-modèle en formule standard, et qui permet à l'assureur :

- De calculer efficacement ses fonds propres économiques ;
- D'estimer les sensibilités des fonds propres aux différents facteurs de risque ;
- D'avoir une vision plus dynamique (journalière, hebdomadaire,...) de sa solvabilité.

Cette approche est basée sur :

- une construction d'une base d'apprentissage qui est alimentée par les QRTs des exercices précédents.
- La construction d'un méta-modèle sur cette base afin de déduire pour chaque exercice futur le montant des fonds propres adapté à la situation économique.

Pour un passif rassemblant des contrats d'épargne en Euros, le méta-modèle a été construit à partir d'une base d'apprentissage constituée d'un historique de SCR et de FP calculés à l'aide des sorties d'un modèle ALM obtenues sur plusieurs exercices. Nous avons comparé différentes approches de méta-modélisation basées sur des algorithmes d'apprentissage statistique, chacune étant accompagné de sa méthode d'interprétation ou d'analyse de sensibilité (basée sur des valeurs de Shapley ou des indices de Sobol). Cette interprétation nous a permis d'identifier les facteurs de risque dont l'évolution influence le plus la volatilité des fonds propres économiques.

1 Organisation de l'étude

La méthode permet de déterminer la variation des fonds propres économiques liée à des changements de conditions économiques. Cette interpolation des fonds propres économiques se fait à l'aide d'un méta-modèle du modèle ALM obtenu en appliquant des techniques d'apprentissage statistique. Ces dernières permettent de réduire considérablement la complexité des calculs. Les différentes étapes de mise en œuvre de l'approche sont détaillées ci-dessous :

Identification des facteurs de risques : Cette étape permet d'identifier les facteurs de risques auxquels est soumis le portefeuille faisant l'objet de cette étude. Nous avons travaillé avec des contrats investis en Fonds Euro.

Construction de la base d'apprentissage : Nous disposons d'un GSE monde réel qui nous fournit des chocs pour nos différents facteurs de risques sur diverses périodes. Ces chocs représentent la variation annuelle espérée de ces facteurs de risque et constituent les inputs de notre base d'apprentissage.

Calcul du SCR formule Standard Cette étape consiste à générer $N = 500$ scénarios des risques financiers sur un horizon 50 ans sous la probabilité Risque Neutre. Ces trajectoires permettront le calcul de la valeur des fonds propres économiques et par conséquent du SCR à l'aide d'un modèle ALM en utilisant la formule standard. Cette étape est équivalente à un exercice normal de clôture de compte sous solvabilité 2.

Apprentissage automatique : Grâce au modèle ALM, nous avons pu calculer les fonds propres économiques en adéquation avec l'instant d'évaluation et les variations des facteurs de risque à cet instant. Une explication plus détaillée sur la manière dont les inputs et les outputs sont pris en compte fera l'objet d'étude dans le corps de l'article. Ainsi nous avons pu comparer la performance de plusieurs algorithmes d'apprentissage statistique pour la conception du méta-modèle.

Interprétation des différents modèles utilisés : Afin d'analyser les différents risques impactant le portefeuille étudié, nous avons proposé des approches d'interprétation des différents méta-modèles utilisés. L'objectif est d'identifier, dans chaque cas, les facteurs de risque impactant le plus la volatilité des fonds propres économiques. Ces approches d'interprétation sont basées sur le calcul des *Shapley Additive Values* et sur une analyse de sensibilité par indices de Sobol (dans le cas du méta-modèle construit par régression GP).

2 Construction de la base d'apprentissage

Dans cette section, nous déterminons dans un premier temps, les facteurs de risques qui impactent le portefeuille étudié. Dans un deuxième temps, nous présentons le modèle ALM utilisé dans cette étude et enfin les différentes étapes de la construction de la base d'apprentissage.

2.1 Portefeuille étudié

Le bilan du portefeuille utilisé pour les projections est composé de la manière suivante :

Actif	Valeur	Passif	Valeur
obligation	110 313 823	Fonds Propres	6 170 411
action	3 564 121	Provison Mathématique	111 934 748
immo	1 979 296	Reserve Capitalisation	3 801 119
cash	6 336 425	PPE	287 386
total Actif	122 193 666	Total Passif	122 193 666

Table 1 Bilan du portefeuille étudié

Ce bilan est projeté sur diverses périodes en respectant l'allocation cible suivante :

- pourcentage obligation : 70%
- pourcentage action : 10%
- pourcentage immobilier : 5%
- pourcentage cash : 15%

Les détails sur les caractéristiques et hypothèses sur le passif sont renseignés en Annexe.

2.2 Facteurs de risque

Divers facteurs de risque impactent un portefeuille investi sur le Fonds Euro. On peut citer :

- facteurs de risque action : dans notre allocation d'actifs, nous avons un certain pourcentage investi sur des actions afin de profiter des rendements importants que peuvent conférer ces dernières.
- facteurs de risque taux : Le portefeuille est composé majoritairement d'actifs obligataires qui sont soumis aux fluctuations des taux d'intérêt. De plus, la valorisation des engagements de l'assureur tient compte de ce facteur de risque via le facteur d'actualisation et la revalorisation des contrats. Ainsi les taux impactent non seulement l'actif mais aussi le passif.
- facteurs de mortalité : la mortalité est un facteur de risque important car une hausse de la mortalité des individus du portefeuille peut entraîner des ventes d'actif en moins values ce qui impacterait directement le résultat de l'assureur et par conséquent ses fonds propres économiques.
- facteurs de rachat : le raisonnement ci-dessus est aussi valable pour le rachat.
- le spread de crédit qui dépend de l'émetteur d'un titre obligataire. En effet, plus l'émetteur est risqué plus le niveau de spread est élevé ce qui augmente du coup la probabilité de défaut de cet émetteur.
- le niveau des Provisions mathématiques (PM) donne l'ampleur des impacts sur les fonds propres économiques (FPE). Ainsi, nous considérons cette variable comme étant un "driver" du niveau des FPE.

La calibration de ces facteurs de risque sur leur évolution empirique permettra de déterminer des déformations futures représentant le plan d'expérience des sensibilités à appliquer pour obtenir la valeur des fonds propres économiques.

2.3 Projection sur un an du modèle ALM implémenté

Le modèle ALM utilisé dans la valorisation des engagements de l'assureur est subdivisé en deux demi périodes par année de projection. La première demi période est composée des principaux mécanismes suivants :

- Valorisation des différentes classes d'actif composant le portefeuille.
- Calcul des produits financiers issus des différents investissements.

- Calcul du flux de prestation et des revalorisations de demi-période financé par les produits financiers et/ou le cash et si possible la vente des actifs selon des stratégies de vente bien définies.

Les mécanismes de la deuxième période s'articulent de la manière suivante :

- Revalorisation des différentes classes d'actif composant le portefeuille sur la deuxième demi-période.
- Re-balancement des actifs pour l'atteinte de l'allocation cible
- Calcul des revalorisations de la deuxième demi-période et financement de ces dernières avec les produits financiers réalisés (coupons, PMVR, etc,..).
- La reprise de la PPB pour financement des revalorisations si insuffisance des produits financiers ou dotation de la PPB sur huit années.

Tous ces mécanismes sont schématisés en Figure 1 :

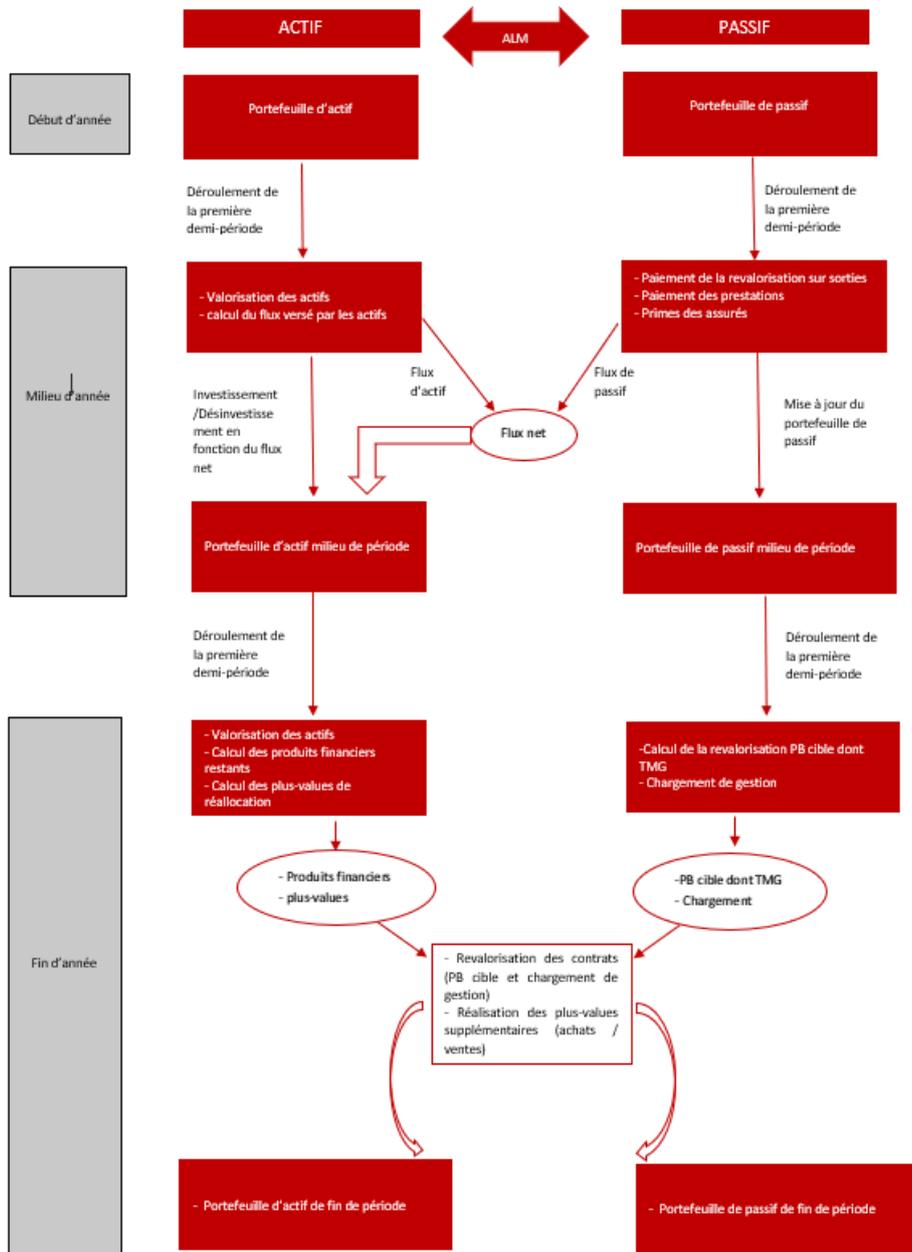


Figure 1 Différentes étapes du modèle ALM

2.4 Mise en place de la base de données

Le GSE monde réel (cf. Annexes Section 7) fournit des scénarios d'évolution des facteurs de risque sur plusieurs périodes (1 : 50 semaines). A partir de ces scénarios, nous déterminons les chocs qui sont les variations hebdomadaires des facteurs de risque. Ces chocs représentent les éléments principaux à exploiter pour la construction de notre base d'apprentissage. Afin de faciliter la compréhension des différentes étapes de la construction de notre base, nous avons opté pour une illustration plus simple. Deux facteurs de risque sont considérés : les actions et les taux de maturité 1 an. Aussi, on va considérer pour le calcul du SCR un choc de -39% sur les actions et un choc à la hausse et la baisse de 1% sur les taux. Ces hypothèses sont faites dans le but de simplifier l'illustration. Les différentes étapes sont les suivantes :

- dans un premier temps, nous avons projeté sur 3 périodes ces 2 facteurs de risque suite aux différents chocs issus du GSE monde réel. Ci-dessous leur évolution au cours de ces 3 périodes pour une simulation choisie :

Période	Action	Taux 1 an
0	2 000	-0.31%
1	1 983	-0.32%
2	1 992	-0.30%
3	2 063	-0.30%

Rappelons que les périodes de projection considérées sont des périodes hebdomadaires.

- Ensuite, il a fallu déterminer les déformations hebdomadaires relatives δ . Ces déformations δ représentent la variation hebdomadaire des facteurs de risques. Ce paramètre est important car le but est de créer une base d'apprentissage composée des variations hebdomadaires afin d'avoir toutes les variables explicatives dans le même ordre de grandeur.

Période	Action	Taux 1 an
0	0	0
1	-0.83%	2.37%
2	0.43%	-6.39%
3	3.50%	2.63%

- Après cela, il a fallu calculer le coefficient d'ajustement $\prod_{i=0}^t (1 + \delta_i)$ qui représente les impacts cumulés et permet de projeter depuis l'instant initial jusqu'à la période d'intérêt t :

Période	Action	Taux 1 an
0	1.00	1.00
1	0.99	1.02
2	0.99	0.95
3	1.03	0.98

- Enfin, pour le calcul du SCR au titre de ces deux risques, il faut donc calculer les FP centraux et choqués au titre de chaque risque pour chaque période t . En effet, les déformations obtenues δ nous permettent de projeter le bilan à la période t concernée. Ces déformations déterminent la situation des éléments du bilan à cette période et sont utiles pour le calcul des FP centraux. Dans un second temps, pour calculer le SCR à cette période, il faut donc aussi calculer les FP choqués au titre des différents facteurs de risque en respectant les chocs de la formule standard.

- Pour les FP centraux, les lignes d'input considérées seront uniquement constituée de : $\prod_{i=0}^t (1 + \delta_i)$

- Pour les FP choqués au titre du risque r , il faut aussi rajouter le choc β_r de la formule standard pour le risque en question. Ainsi, les lignes d'input considérées seront donc constituées de : $\prod_{i=0}^t (1 + \delta_i) * (1 - \beta_r)$

En effet pour l'adéquation de la formule standard, il faut déterminer les différents fonds propres économiques choqués et centraux. Ainsi pour chaque période d'intérêt, nous avons quatre lignes qui sont créés :

Période	Action	Taux 1 an	fonds propres économiques
0	1.00	1.00	FP_central_0
0	0.61	1.00	FP_choc_action_0
0	1.00	0.99	FP_taux_baisse_0
0	1.00	1.01	FP_taux_hausse_0
1	0.99	1.02	FP_central_1
1	0.60	1.02	FP_choc_action_1
1	0.99	1.01	FP_taux_baisse_1
1	0.99	1.03	FP_taux_hausse_1
2	0.99	0.95	FP_central_2
2	0.60	0.95	FP_choc_action_2
2	0.99	0.94	FP_taux_baisse_2
2	0.99	0.96	FP_taux_hausse_2
3	1.03	0.98	FP_central_3
3	0.62	0.98	FP_choc_action_3
3	1.03	0.97	FP_taux_baisse_3
3	1.03	0.99	FP_taux_hausse_3

En procédant de la même manière avec l'ensemble des risques considérés, on obtient une base d'apprentissage ressemblant à la table ci-dessous :

Periode	action	mort	taux_1	taux_2	taux_3	taux_4	taux_5	Rachat	frais	PM	FP_
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	8 446 292
1	1,000	1,200	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	8 870 673
1	1,000	0,800	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	8 928 031
1	1,000	1,000	1,443	1,289	1,253	1,244	1,229	1,000	1,000	1,000	7 740 066
1	1,000	1,000	0,567	0,536	0,519	0,563	0,628	1,000	1,000	1,000	10 074 092
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,500	1,000	1,000	8 935 921
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,500	1,000	1,000	8 826 141
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,100	1,000	8 743 689
2	1,019	0,996	1,018	0,978	0,989	1,018	0,983	0,550	1,000	1,002	8 792 064
2	1,019	1,195	1,018	0,978	0,989	1,018	0,983	0,550	1,000	1,002	8 773 802
2	1,019	0,797	1,018	0,978	0,989	1,018	0,983	0,550	1,000	1,002	8 838 350
2	1,019	0,996	1,469	1,261	1,239	1,267	1,209	0,550	1,000	1,002	7 552 448
2	1,019	0,996	0,578	0,525	0,513	0,573	0,618	0,550	1,000	1,002	10 000 335
2	1,019	0,996	1,018	0,978	0,989	1,018	0,983	0,825	1,000	1,002	8 840 690
2	1,019	0,996	1,018	0,978	0,989	1,018	0,983	0,275	1,000	1,002	8 711 636
2	1,019	0,996	1,018	0,978	0,989	1,018	0,983	0,550	1,100	1,002	8 619 059

Table 2 Base d'apprentissage pour les 2 premières périodes

Précisons que la base présentée ci dessus n'est pas exhaustive car en réalité nous avons fait une projection sur 50 périodes (i.e., 50 semaines).

Pour le facteur de risque taux, nous avons fait une décomposition en cinq facteurs de risque :

- les taux 1 qui représentent les taux de maturité 1 à 10 ans
- les taux 2 qui représentent les taux de maturité 11 à 20 ans
- les taux 3 qui représentent les taux de maturité 21 à 30 ans
- les taux 4 qui représentent les taux de maturité 31 à 40 ans
- les taux 5 qui représentent les taux de maturité 41 à 50 ans

L'évolution de chaque facteur de risque de taux_i , $i \in [1 : 5]$ est issue de l'analyse en composantes principales de la plage de taux correspondante. Cette évolution permet de calculer les FP centraux. Pour le calcul des FP choqués au titre du risque de taux, on applique sur cette évolution du risque des taux, les chocs de la Formule Standard selon les exigences de révision de solvabilité II en 2020.

2.4.1 Motivation

La motivation derrière la création de cette base est de permettre le calcul des fonds propres économiques d'une manière dynamique et adaptée à n'importe quel pas de temps. En effet, avec cette approche, les assureurs peuvent facilement mettre à jour leur base d'input mais aussi réaliser des calculs de fonds propres économiques de manière journalière, hebdomadaire ou mensuelle. Elle présente aussi comme avantages de considérer les coefficients d'ajustement au détriment de la valeur initiale de la variable.

L'objectif est de permettre à l'assureur de déduire sa solvabilité au cours de la période t connaissant son évolution jusqu'à la période $t - 1$. Nous souhaitons également déterminer les sensibilités des fonds propres économiques par rapport aux différents risques du portefeuille et ainsi d'adapter au mieux sa gestion des risques. Le meta-modèle proposé et qui sera décrit dans les sections suivantes, est une solution adéquate permettant de répondre à cet objectif.

3 Mode opératoire

Le méta-modèle est construit selon des étapes précises afin de déterminer l'efficacité de chaque modèle étudié pour l'interpolation des Fond Propres et du SCR. Ces différentes étapes sont décrites ci-dessous.

3.1 Découpage de la base d'apprentissage

Afin de bien évaluer la performance de chacun des algorithmes étudiés, nous avons séparé la base d'apprentissage initiale en 2 sous bases :

- la base d'apprentissage : nous faisons l'hypothèse que l'assureur a déjà fait ses exercices réglementaires sur la période $t \in [1 : 40]$. Pendant ces exercices, il a donc calculé les FP centraux et FP choqués relatifs aux différents facteurs de risque pour chacune de ces périodes. Les périodes considérées seront utilisées comme base d'apprentissage. Cette base servira aussi à réaliser l'ajustement des paramètres des différents modèles étudiés. En effet, le but est de comparer la prédiction des modèles optimaux sur la base de test afin de n'en pénaliser aucun.
- la base test : nous avons pris comme base test la période $t \in [41 : 50]$. Pour chaque modèle étudié, nous allons prédire les différents fonds propres économiques centraux et choqués à chacune de ces périodes connaissant l'évolution des facteurs.

Remarque : Pour prédire les fonds propres économiques centraux et choqués de la période t , la base d'apprentissage doit contenir les observations aux dates $i \in [1 : t - 1]$, c'est-à-dire contenir les informations jusqu'au dernier exercice. En effet, à la date t , ces informations disponibles jusqu'à $t - 1$ sont considérées comme connues.

Dans notre cadre d'étude, les bases d'apprentissage et de test sont constituées en respectant l'ordre chronologique de déroulement des exercices réglementaires.

3.2 Algorithmes testés

Plusieurs algorithmes d'apprentissage statistique ont été testés. Le but est de voir les impacts de chacun sur la prédiction des fonds propres économiques et aussi sur le calcul du SCR. Parmi les algorithmes qui ont été testés, nous avons retenu et comparé :

1. la régression polynomiale.
2. les régressions Ridge et Lasso.
3. les Forêts Aléatoires.
4. l'Extrême Gradient Boosting.
5. le Krigeage (ou régression par processus gaussien).

3.3 Critères de comparaison

L'objectif de cette partie est de mettre en oeuvre une approche comparative des différents algorithmes selon un critère de performance. En effet, avec notre modèle ALM, nous avons déterminé et ce pour toutes les périodes, les différentes valeurs des fonds propres économiques et du SCR. Ainsi, nous pouvons mesurer l'écart entre les données issues du modèle ALM et les données issues des différents méta modèles sur les fonds propres économiques et le SCR sur la base de test. Les métriques que nous jugeons adéquates pour notre critère de comparaison sont :

- le Root Mean Square Error $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}{n}}$.
- le Mean Relative Error $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\hat{y}_i - y_i|}{y_i}$.

avec : \hat{y}_i la prédiction du méta modèle pour l'observation i , y_i la valeur obtenue avec le modèle ALM et n le nombre d'observations dans la base.

4 Interprétation des modèles

4.1 SHapley Additive exPlanations pour l'interprétation des modèles de ML

L'approche SHAP (SHapley Additive exPlanations) introduite par Lundberg et Lee (2016) est une méthode pour expliquer les prédictions individuelles. SHAP est basée sur la théorie optimale des jeux des valeurs de Shapley (pour plus de détails, voir [Molnar \(2020\)](#)).

Le but de SHAP est d'expliquer la prédiction d'une observation i en calculant la contribution de chaque variable explicative x_j^i , $j = 1, \dots, d, x$ à la prédiction. La méthode d'explication de SHAP calcule les valeurs de Shapley à partir de la théorie du jeu de coalition. Chacune des variables explicatives d'une observation agit en tant que joueur dans une coalition. Les valeurs de Shapley nous disent comment répartir équitablement la prédiction parmi les variables explicatives. Une innovation de SHAP est que l'explication de la valeur Shapley est représentée comme une méthode additive d'attribution de caractéristique, un modèle linéaire. Ce qui rend beaucoup plus facile les interprétations, SHAP spécifie l'explication comme suit :

$$g(z') = \phi_0 + \sum_{j=1}^M \phi_j z_j' \quad (1)$$

où :

- g est le modèle d'interprétation de chaque observation
- $z' \in \{0, 1\}^M$: est le vecteur de coalition
- M est la taille des coalitions, qui est aussi le nombre de variables explicatives.

Dans une coalition, la valeur 1 signifie que la variable est présente dans la coalition tandis que la valeur 0 marque son absence.

Avant la description de l'algorithme de détermination des valeurs de shapley, nous présentons les variables suivantes :

- x_j est la j^{iem} variable de l'observation x
- h_x est une fonction qui est définie pour chaque observation x . En effet pour chaque x .

$$\begin{cases} si & z'^j = 1 & alors & h_x(z'^j) = x_j \\ si & z'^j = 0 & alors & h_x(z'^j) = random(x_j) \end{cases} \quad (2)$$

Random(x_j) veut dire qu'on simule une réalisation de la variable aléatoire x_j . La figure 2 illustre bien son fonctionnement.

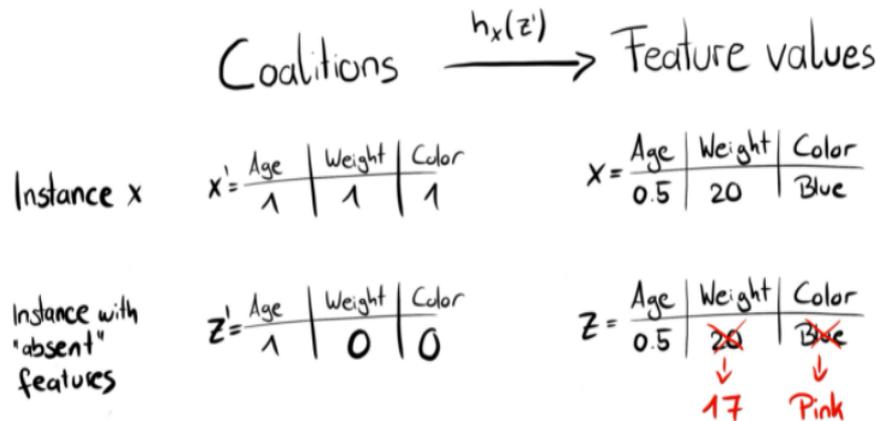


Figure 2 Fonctionnement de h_x . Source : [Molnar \(2020\)](#)

- π dont la formule est définie dans l'algorithme, représente le poids de chaque coalition. Ce poids est important dans le processus de minimisation pour la détermination des ϕ_j
 - f est la fonction du modèle complexe que nous voulons expliquer avec les valeurs de shapley
- L'algorithme de Shapley est défini de la manière suivante :

Algorithm 1 Evaluation des valeurs de Shapley

```

1: On fixe  $x$  une observation dont on veut déterminer les valeurs de Shapley
2:  $K$  : le nombre de coalitions
3:  $M$  : la taille de chaque coalition
4: for  $k = 1, \dots, K$  do
5:   Faire des tirages aléatoires des éléments de chaque coalition  $z'_k \in \{0, 1\}^M$ 
6:   for  $j = 1, \dots, M$  do
7:     if  $z'_k{}^j = 1$  then
8:        $h_x(z'_k{}^j) = x_j$ 
9:     else
10:       $h_x(z'_k{}^j) = \text{random}(x_j)$ 
11:    end if
12:  end for
13:  Calculer le poids  $\pi_k(z'_k) = \frac{\binom{M-1}{|z'_k|}}{\binom{M}{|z'_k|}^{|z'_k|} \binom{M-|z'_k|}{|z'_k|}}$ 
14: end for
15: return  $\phi_j$  tel que  $L(f, g, \pi) = \sum_k [f(h_x(z'_k)) - g(z'_k)]^2 \pi_k(z'_k)$  soit minimal

```

Le poids $\pi_x(z')$ est construit de manière à avantager de manière simultanée les coalitions qui contiennent un petit et un grand nombre de variables. L'intuition derrière ce choix est que

- si une coalition comporte par exemple une variable explicative, on isole clairement son impact sur la prédiction.
- si une coalition comporte (M-1) variables explicatives, on apprend non seulement leurs importances individuelles mais aussi l'importance de leur interaction sur la prédiction.
- si une coalition contient un nombre moyen de variables explicatives, on apprend moins sur les effets individuels et collectifs sur la prédiction.

Ainsi, dans la mise en place de l'algorithme, au niveau de l'échantillonnage des coalitions, il faut dans un premier temps privilégier les coalitions contenant 1 variable et M-1 variables, et si l'algorithme n'est pas trop complexe, on ajoute les coalitions contenant 2 variables et (M-2) variables et ainsi de suite.

4.2 Analyse de sensibilité par krigeage

Plusieurs travaux ont été réalisés sur l'analyse de sensibilité par krigeage. On peut citer, par exemple, [Warnes \(1986\)](#), [Le Gratiet et al. \(2014\)](#), [Benoumechiara and Elie-Dit-Cosaque \(2019\)](#), [Amini et al. \(2021\)](#). Cependant, nous nous sommes basés sur les travaux de l'article [Le Gratiet et al. \(2014\)](#). En effet, considérons l'espace des inputs $Q \subset \mathbb{R}^d$ tel que $(Q, \mathcal{B}(Q))$ soit un espace mesurable de la forme

$$(Q, \mathcal{B}(Q)) = (Q_1 \times \dots \times Q_d, \mathcal{B}(Q_1 \times \dots \times Q_d))$$

où \mathcal{B} est la tribu borélienne et $Q_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$ des parties non vides de \mathbb{R} . Introduisons par ailleurs la mesure de probabilité, μ dans $(Q, \mathcal{B}(Q))$, de la forme :

$$\mu(x) = \mu_1(x^1) \otimes \dots \otimes \mu_d(x^d)$$

La décomposition de Hoeffding stipule que n'importe quelle fonction $z(x) \in L^2_{\mu}(\mathbb{R}^d)$ peut être décomposée de la manière suivante :

$$z(x) = z_0 + \sum_{i=1}^d z_i(x^i) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} z_{ij}(x^i, x^j) + \cdots + z_{1,2,\dots,d}(x^1, \dots, x^d) = \sum_{u \in \mathcal{P}} z_u(x^u)$$

avec :

$$\begin{aligned} z_0 &= \mathbb{E}_X [z(X)] \\ z_i(X^i) &= \mathbb{E}_X [z(X) | X^i] - z_0 \\ z_{ij}(X^i, X^j) &= \mathbb{E}_X [z(X) | X^i, X^j] - z_i(X^i) - z_j(X^j) - z_0, \\ &\vdots \\ z_u(X^u) &= \mathbb{E}_X [z(X) | X^u] - \sum_{v \subset u} z_v(X^v) \end{aligned}$$

Soit $D = \text{Var}_X(z(X))$, on obtient :

$$D = \sum_{i=1}^d D_i + \sum_{1 \leq i < j \leq d} D_{ij} + \cdots + D_{1,2,\dots,d} = \sum_{u \in \mathcal{P}} D_u$$

avec $D_u = \text{Var}_X(\mathbb{E}_X [z(X) | X^u]) - \sum_{v \subset u} \text{Var}_X(\mathbb{E}_X [z(X) | X^v])$. Ainsi, les indices de sensibilité sont donnés par :

$$S_u = \frac{D_u}{D}$$

où $u \in \mathcal{P}$ avec \mathcal{P} une collection de sous ensembles de $X \in \mathbb{R}^d$. Nous pouvons donc interpréter chaque S_u comme la part de variance de $z(x)$ due à x^u .

$$1 = \sum_{i=1}^d S_i + \sum_{1 \leq i < j \leq d} S_{ij} + \cdots + S_{1,2,\dots,d} = \sum_{u \in \mathcal{P}} S_u$$

En particulier, S_i est appelé l'indice de sensibilité de premier ordre de la variable x^i , il mesure l'effet individuel de la variable sur la prédiction, c'est-à-dire la part de variance de $z(x)$ expliquée par x^i . S_{ij} pour $i \neq j$ étant la sensibilité de second ordre, il mesure la part de variance de $z(x)$ due à x^i et x^j et non expliquée par les effets individuels de x^i et x^j . La formule de l'indice de sensibilité (ou de Sobol) du premier ordre de la variable X^{d_1} est :

$$S^{X^{d_1}} = \frac{V^{X^{d_1}}}{V} = \frac{\text{Var}_X(\mathbb{E}_X [z(X) | X^{d_1}])}{\text{Var}_X(z(X))}$$

Cet indice de sensibilité peut être estimé par Monte Carlo en utilisant un modèle de processus gaussien déjà calibré $Z(X_i)$ avec la formule suivante :

$$S_m^{X^{d_1}} = \frac{V_m^{X^{d_1}}}{V_m} = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z(X_i) Z(\tilde{X}_i) - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z(X_i) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z(\tilde{X}_i)}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z(X_i)^2 - \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z(X_i)\right)^2} \quad (3)$$

La proposition ci-dessous (extraite de [Le Gratiet et al. \(2014\)](#)) donne une indication sur l'estimation du numérateur $V_m^{X^{d_1}}$.

Proposition *Considérons deux vecteurs aléatoires (X, \bar{X}) avec $X = (X^{d_1}, X^{d_2})$ et $\bar{X} = (X^{d_1}, \bar{X}^{d_2})$, où X^{d_1} est un vecteur aléatoire avec la mesure de probabilité μ^{d_1} sur l'espace Q^{d_1} , et X^{d_2} et \bar{X}^{d_2} sont deux vecteurs aléatoires indépendants avec la mesure μ^{d_2} sur l'espace Q^{d_2} . Nous avons l'égalité suivante :*

$$\text{Var}_X(\mathbb{E}_X [z(X) | X^{d_1}]) = \text{Cov}_X(z(X), z(\bar{X})).$$

Pour l'estimation, il suffit donc de prendre $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} \bar{X}$ avec $X \perp \bar{X}$. En effet, le modèle Z sera très utile car la loi a posteriori est utilisée pour les différentes simulations. Dans le cadre de nos travaux :

- $d_1 = k$ avec $k \in (\text{action}, \text{mortalite}, \text{taux1}, \text{taux2}, \text{taux3}, \text{taux4}, \text{taux5}, \text{rachat}, \text{Frais}, \text{PM}, \text{Periode})$. Avec cette notation pour d_1 , nous nous sommes intéressé uniquement aux sensibilités du premier ordre.
- Dans l'algorithme ci-dessous, pour pouvoir estimer les paramètres $\mathcal{S}_m^{X^{d_1}}$ conformément à la proposition énoncée, nous avons dû générer deux bases $(x_i)_{i=1,\dots,m}$ et $(\bar{x}_i)_{i=1,\dots,m}$ en se servant du GSE monde réel et de la méthodologie décrite à la sous-section 2.4. La génération de ces bases avec le GSE nous permet de respecter les deux contraintes qui sont :
 - Égalité en loi entre les variables explicatives des deux bases.
 - Indépendance en loi entre les variables explicatives des deux bases.
- m désigne le nombre d'observations dans les bases $s(x_i)_{i=1,\dots,m}$ et $(\bar{x}_i)_{i=1,\dots,m}$

Algorithm 2 Évaluation de la distribution de $\mathcal{S}_m^{X^{d_1}}$

- 1: Construire z le modèle de Krigeage
 - 2: Générer deux échantillons $(x_i)_{i=1,\dots,m}$ et $(\bar{x}_i)_{i=1,\dots,m}$ des variables aléatoires $(X_i)_{i=1,\dots,m}$ selon la mesure de probabilité μ .
 - 3: Soit N_z le nombre de simulations et B le nombre de bootstrap pour évaluer l'incertitude liée au calcul d'intégrales par Monte Carlo.
 - 4: **for** $k = 1, \dots, N_z$ **do**
 - 5: Simuler des réalisations de vecteur de FP en appliquant z sur les bases $\mathbf{x} = \{(x_i)_{i=1,\dots,m}, (\bar{x}_i)_{i=1,\dots,m}\}$
 - 6: Calculer $\hat{\mathcal{S}}_{m,k,1}^{X^{d_1}}$ à partir de $z(\mathbf{x})$
 - 7: **for** $l = 2, \dots, B$ **do**
 - 8: Réaliser des tirages aléatoires avec remise de deux échantillons \mathbf{u} et $\bar{\mathbf{u}}$ de $\{(x_i)_{i=1,\dots,m}\}$ et $\{(\bar{x}_i)_{i=1,\dots,m}\}$
 - 9: Calculer $\hat{\mathcal{S}}_{m,k,l}^{X^{d_1}}$ avec $z(\mathbf{x}^B)$ et $\mathbf{x}^B = \{\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}\}$
 - 10: **end for**
 - 11: **end for**
 - 12: return $\left(\hat{\mathcal{S}}_{m,k,l}^{X^{d_1}}\right)_{\substack{k=1,\dots,N_z \\ l=1,\dots,B}}$
-

$\mathcal{S}_{m,n}^{X_1}$ de taille $N_z \times B$ prend en compte l'incertitude liée au méta modèle et celle liée au calcul des intégrales via monte carlo. Ainsi, nous pouvons déduire l'estimateur de l'indice de sensibilité $\bar{\mathcal{S}}_m^{X^{d_1}}$ pour $\mathcal{S}_m^{X^{d_1}}$ par :

$$\bar{\mathcal{S}}_m^{X^{d_1}} = \frac{1}{N_z B} \sum_{\substack{k=1,\dots,N_z \\ l=1,\dots,B}} \hat{\mathcal{S}}_{m,k,l}^{X^{d_1}}$$

De plus, nous pouvons estimer la variance de $\mathcal{S}_{m,n}^{X_1}$ par :

$$\hat{\sigma}^2 \left(\mathcal{S}_{m,n}^{X^{d_1}} \right) = \frac{1}{N_z B - 1} \sum_{\substack{k=1,\dots,N_z \\ l=1,\dots,B}} \left(\hat{\mathcal{S}}_{m,k,l}^{X^{d_1}} - \bar{\mathcal{S}}_m^{X^{d_1}} \right)^2$$

A partir de l'échantillon $\left(\hat{\mathcal{S}}_{m,k,l}^{X^{d_1}}\right)_{\substack{k=1,\dots,N_z \\ l=1,\dots,B}}$, nous pouvons estimer la part de variance de $\mathcal{S}_m^{X^{d_1}}$ due au méta modèle avec la formule suivante :

$$\hat{\sigma}_{Z_n}^2 \left(\mathcal{S}_m^{X^{d_1}} \right) = \frac{1}{B} \sum_{l=1}^B \frac{1}{N_z - 1} \sum_{k=1}^{N_z} \left(\hat{\mathcal{S}}_{m,k,l}^{X^{d_1}} - \bar{\mathcal{S}}_{m,k,l}^{X^{d_1}} \right)^2$$

où $\bar{\mathcal{S}}_{m,n,l}^{X^{d_1}} = \left(\sum_{i=1}^{N_z} \mathcal{S}_{m,n,i,l}^{X^{d_1}} \right) / N_z$. Aussi, nous pouvons estimer la part de variance de $\mathcal{S}_{m,n}^{X^{d_1}}$ due au calcul d'intégrales de Monte Carlo avec la formule suivante :

$$\hat{\sigma}_{MC}^2 \left(\mathcal{S}_{m,n}^{X_1} \right) = \frac{1}{N_z} \sum_{i=1}^{N_z} \frac{1}{B - 1} \sum_{k=1}^B \left(\hat{\mathcal{S}}_{m,n,k,i}^{X_1} - \bar{\mathcal{S}}_{m,n,k}^{X^{d_1}} \right)^2$$

avec $\overline{\mathcal{S}}_{m,n,k}^{X^{d_1}} = \left(\sum_{i=1}^B \mathcal{S}_{m,n,k,i}^{X^{d_1}} \right) / B$

Nous distinguons trois cas :

- $\hat{\sigma}_{Z_n}^2 (\mathcal{S}_{m,n}^{X_1}) \gg \hat{\sigma}_{MC}^2 (\mathcal{S}_{m,n}^{X_1})$: la variance de $\mathcal{S}_{m,n}^{X_1 d_1}$ est essentiellement due à la variance introduite par le méta modèle.
- $\hat{\sigma}_{Z_n}^2 (\mathcal{S}_{m,n}^{X_1}) \ll \hat{\sigma}_{MC}^2 (\mathcal{S}_{m,n}^{X_1})$: la variance de $\mathcal{S}_{m,n}^{X_1}$ est essentiellement due à la variance introduite par l'échantillonnage pour le calcul d'intégrales.
- $\hat{\sigma}_{Z_n}^2 (\mathcal{S}_{m,n}^{X_1}) \approx \hat{\sigma}_{MC}^2 (\mathcal{S}_{m,n}^{X_1})$: les deux types d'incertitude contribuent équitablement à la variance de $\mathcal{S}_{m,n}^{X_1}$.

Le nombre minimal de simulation de Monte Carlo m est choisi de telle sorte que $\hat{\sigma}_{Z_n}^2 (\mathcal{S}_{m,n}^{X_1 d_1}) \approx \hat{\sigma}_{MC}^2 (\mathcal{S}_{m,n}^{X_1})$. Cette appellation de minimal est due au fait que $\hat{\sigma}_{MC}^2 (\mathcal{S}_{m,n}^{X_1})$ ne domine plus $\hat{\sigma}_{Z_n}^2 (\mathcal{S}_{m,n}^{X_1})$. En pratique, pour le déterminer, nous commençons avec une petite valeur de m et nous l'augmentons jusqu'au premier m qui vérifie l'inégalité : $\hat{\sigma}_{Z_n}^2 (\mathcal{S}_{m,n}^{X_1 d_1}) > \hat{\sigma}_{MC}^2 (\mathcal{S}_{m,n}^{X_1})$.

5 Présentation et interprétation des résultats pour les algorithmes retenus

Pour la suite du développement, nous initialisons les variables suivantes :

- $\mathbf{x}_i = (action_i, mortalite_i, taux1_i, taux2_i, taux3_i, taux4_i, taux5_i, rachat_i, Frais_i, PM_i, temps_i)$: représente le vecteur des facteurs de risque pour l'observation i .
- y_i et \hat{y}_i représentent respectivement les valeurs de fonds propres économiques obtenues avec le modèle ALM et le méta-modèle pour l'observation i .
- β_i est la sensibilité estimée par les modèles pour chacune des variables explicatives.
- ϵ_i est le bruit intrinsèque lié à l'observation i .

5.1 Régression polynomiale

La régression polynomiale est une analyse statistique qui décrit le comportement d'une variable d'intérêt à partir d'une fonction polynomiale des variables explicatives. C'est un cas particulier de régression linéaire multiple, où les observations sont construites à partir des puissances des variables de base. Dans notre cas, nous allons considérer une fonction polynomiale de degré $d \leq 2$ de la forme :

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^d \beta_j \mathbf{x}_i^j + \sum_{1 \leq j \leq k \leq d} \beta_{jk} \mathbf{x}_i^j \mathbf{x}_i^k + \epsilon_i \quad (4)$$

Les paramètres β se déterminent par MCO.

Performances du modèle sur la base test

Les performances du modèle que ce soit sur le SCR ou sur les fonds propres économiques sont décrits ci-dessous :

Méthode	RMSE_FP	MRE_FP	RMSE_SCR	MRE_SCR
Regression polynomiale	72 830	0.61%	49 947	2.48%

Table 3 Métriques sur FP et SCR pour la régression polynomiale

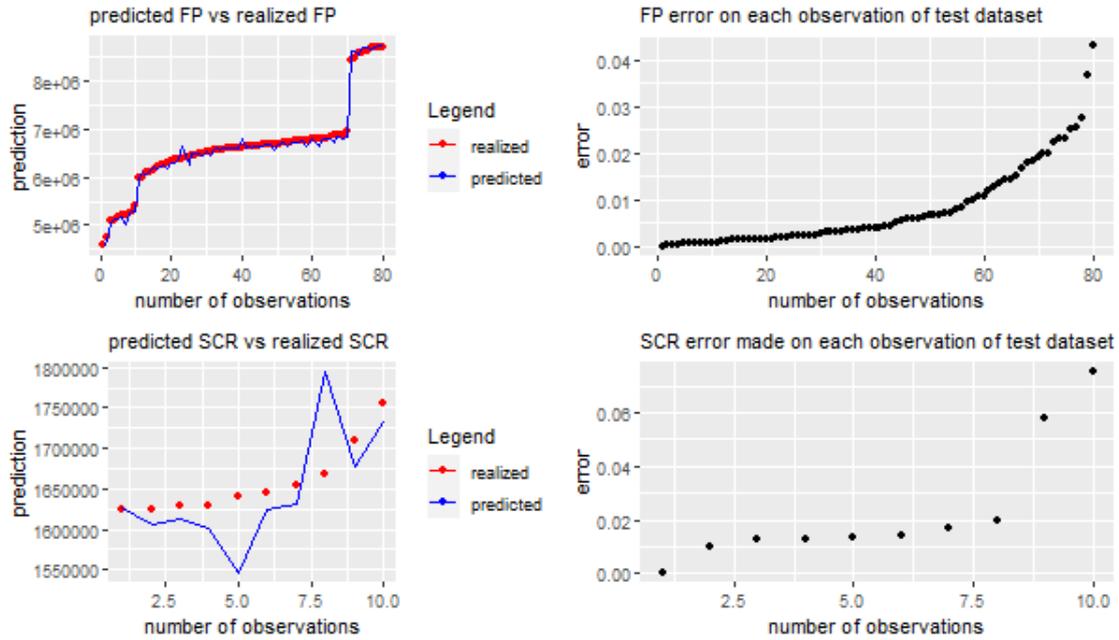
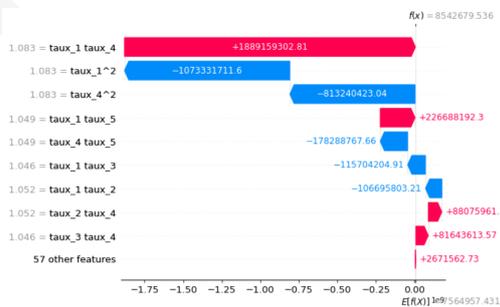


Figure 3 Illustration graphique des performances de la régression polynomiale sur la base de test

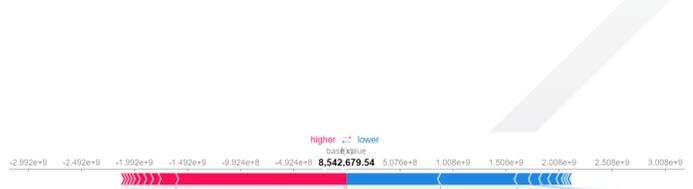
Nous observons clairement au regard des métriques que nous avons choisies que la régression polynomiale performe très bien sur la prédiction des fonds propres économiques des dates d'exercices futurs et un peu moins sur la prédiction du SCR. En effet, elle fait une erreur moyenne de 0.6% sur les fonds propres économiques et une erreur moyenne de 2% sur le SCR. Cette performance sur les fonds propres économiques nous prouve qu'elle arrive clairement à bien capter les effets actif-passif non linéaires qui caractérisent les participations aux bénéficiés et les garanties et options du contrat.

Interprétation du modèle avec SHAP

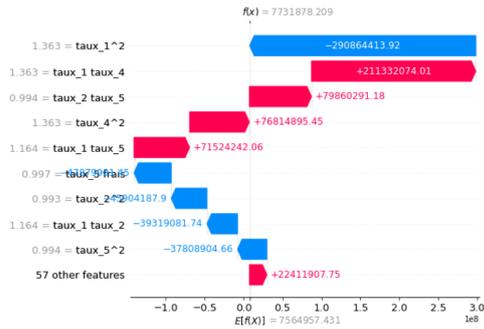
Avec la méthode SHAP, on peut expliquer comment les variables explicatives contribuent à chaque prédiction. Ainsi, au lieu de parler d'importance de variable au niveau global, on parle plutôt d'importance pour chaque observation. Nous avons comparé comment on obtient la prédiction pour deux observations différentes :



(a) Waterfall plot pour l'explication du FP central prédit par la régression polynomiale de la période 10



(b) Force plot pour l'explication du FP central prédit par la régression polynomiale de la période 10



(b) Force plot pour l'explication du FP central prédit par la régression polynomiale de la période 20

(a) Waterfall plot pour l'explication du FP central prédit par la régression polynomiale de la période 20

Pour ces deux observations nous avons réalisé deux types de plot :

- Waterfall plot permet de visualiser par ordre croissant de valeur absolue comment les valeurs de Shapley de chaque variable s'ajoutent pour donner la prédiction finale. Les différentes couleurs montrent l'impact de chaque variable sur la prédiction, la couleur bleue est pour les variables qui tendent à diminuer la prédiction et la couleur rouge pour les variables qui tendent à l'augmenter.
- Force plot permet de classer les variables en deux groupes : les variables qui tendent à diminuer la prédiction et celles qui augmentent la prédiction.

On remarque clairement que d'une observation à une autre, les variables n'ont pas le même impact : par exemple, les taux longs au carré ($taux_4^2$) diminuent les fonds propres économiques à la période 10 et les augmentent à la période 20. Ainsi, pour se couvrir contre une baisse de ses fonds propres à la période 10, le gestionnaire de risque pourra utiliser des produits dérivés qui protègent contre la hausse des taux longs

Ci-dessous, nous avons représenté l'importance des variables globales du modèle. Pour chaque observation de la base d'apprentissage, nous avons une valeur de Shapley par variables explicatives. Ainsi l'importance des variables est calculée en prenant la moyenne de la valeur absolue des valeurs de Shapley pour toutes les observations et par variable.

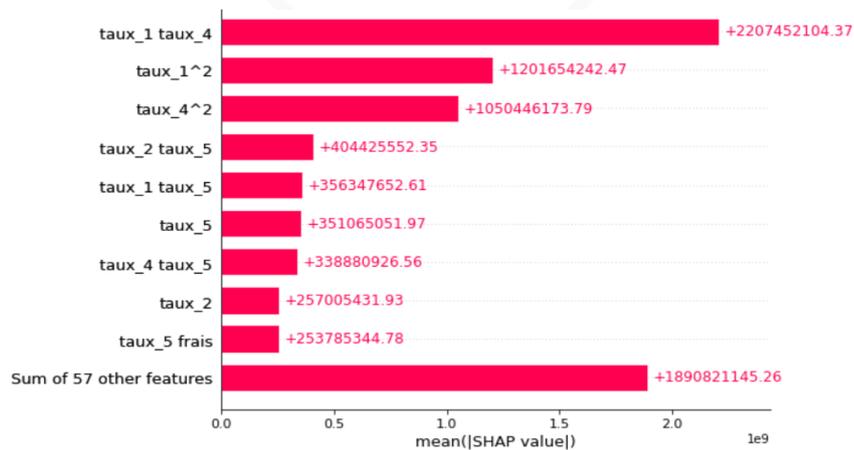


Figure 6 Importance des variables de la régression polynomiale

On remarque qu'en moyenne, c'est le croisement des taux courts et des taux longs (taux_1 et taux_4) qui impacte le plus la prédiction des observations pour ce modèle.

5.2 Régression Ridge

Les régressions Ridge et Lasso sont utiles lorsqu'on travaille sur des bases dont les variables sont très corrélées entre elles. En effet, on introduit une fonction de pénalité afin de contrôler la variance des estimateurs. La fonction à minimiser est de la forme suivante :

$$\min_{\beta_1, \dots, \beta_p} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij} \right)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \quad (5)$$

L'estimateur Ridge s'écrit alors :

$$\hat{\beta}_{\text{Ridge}} = (X'X + \lambda I_p)^{-1} X'y \quad (6)$$

Performances du modèle sur la base test

Les performances du modèle Ridge sur la base de test sont renseignées ci-dessous :

Méthode	RMSE_FP	MRE_FP	RMSE_SCR	MRE_SCR
Régression ridge	86 071	1.02%	193 507	7.57%

Table 4 Métriques sur FP et SCR pour la régression Ridge

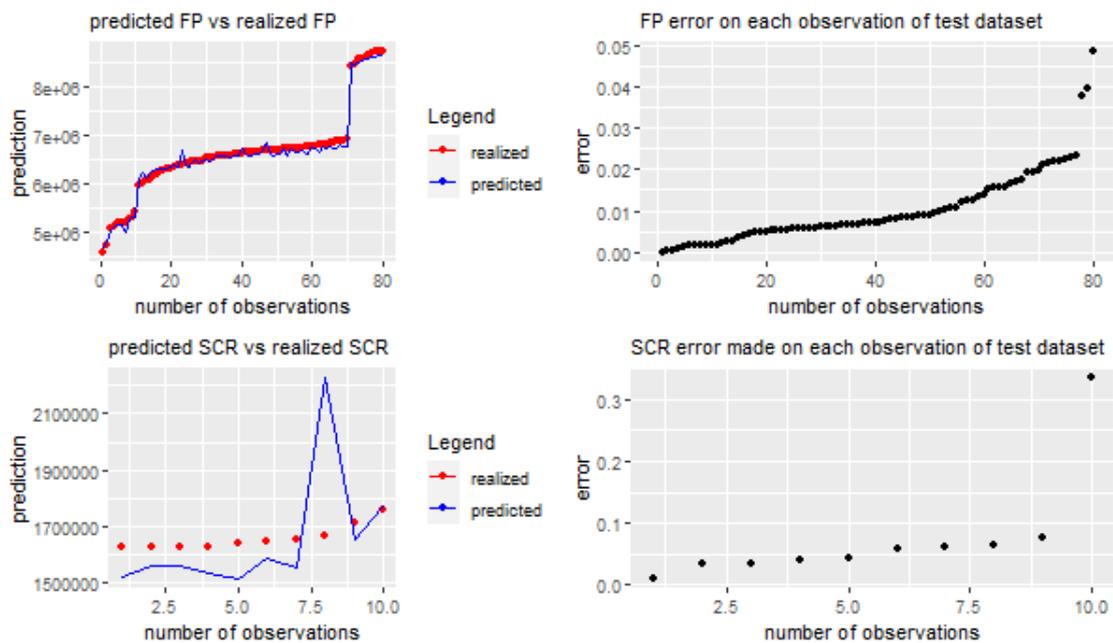
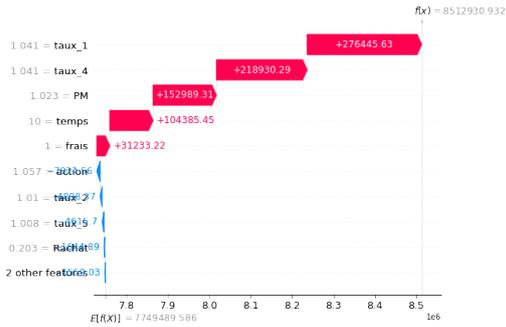


Figure 7 Illustration graphique des performances de la régression Ridge

En effet, on remarque que ce modèle est moins performant en comparaison au modèle polynomial que ce soit sur la prédiction des fonds propres économiques ou sur le calcul du SCR.

Interprétation du modèle avec SHAP

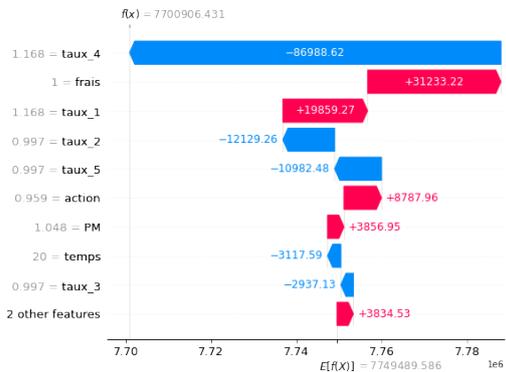
Ci-dessous, nous avons l'impact des valeurs de Shapley sur la prédiction des fonds propres économiques des différentes observations concernant le modèle Ridge :



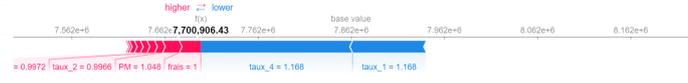
(a) Waterfall plot pour l'explication du FP central prédit par le régression Ridge de la période 10



(b) Force plot pour l'explication du FP central prédit par le régression Ridge de la période 10



(a) Waterfall plot pour l'explication du FP central prédit par la régression Ridge de la période 20



(b) Force plot pour l'explication du FP central prédit par la régression Ridge de la période 20

Nous avons tenu à représenter l'importance globale des variables en utilisant la valeur absolue des valeurs de Shapley pour les variables explicatives :

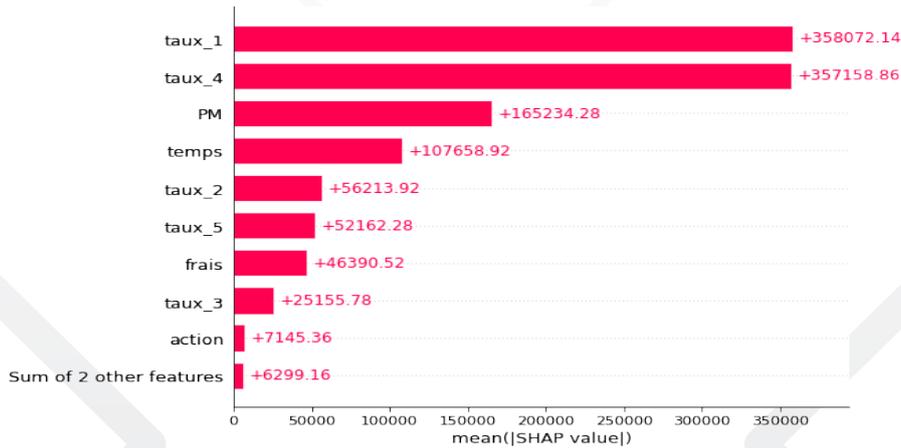


Figure 10 Importance des variables pour la régression Ridge

Pour ce modèle, le taux_1 (variable regroupant les taux de maturité 1 à 10 ans) apparaît comme étant la variable la plus importante impactant en moyenne les prédictions des différentes observations.

5.3 Random Forest

Soit $(\hat{h}(\cdot, \Theta_1), \dots, \hat{h}(\cdot, \Theta_q))$ une collection de prédicteurs par arbres, avec $\Theta_1, \dots, \Theta_q$ q variables aléatoires i.i.d. indépendantes. Le prédicteur des forêts aléatoires \hat{h}_{RF} est obtenu en agrégeant cette collection d'arbres aléatoires de la façon suivante :

- $\hat{h}_{RF}(x) = \frac{1}{q} \sum_{l=1}^q \hat{h}(x, \Theta_l)$ (moyenne des prédictions individuelles des arbres) en régression,
- $\hat{h}_{RF}(x) = \operatorname{argmax}_{1 \leq k \leq K} \sum_{l=1}^q 1_{\hat{h}(x, \Theta_l)=k}$ (vote majoritaire parmi les prédictions individuelles des arbres) en classification.

Cette définition est illustrée par le schéma suivant :

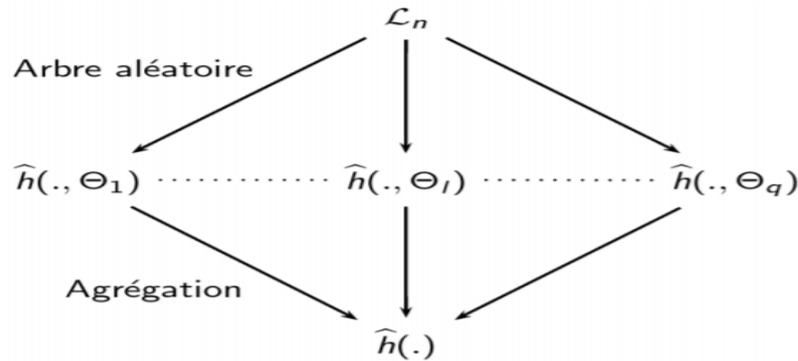


Figure 11 Illustration Random Forest

Performances du modèle sur la base test

Le modèle Random Forest calibré nous donne les performances suivantes sur la base de test :

Méthode	RMSE_FP	MRE_FP	RMSE_SCR	MRE_SCR
Random Forest	134 860	1.59%	253 204	12.71%

Table 5 Métriques sur FP et SCR pour Random Forest

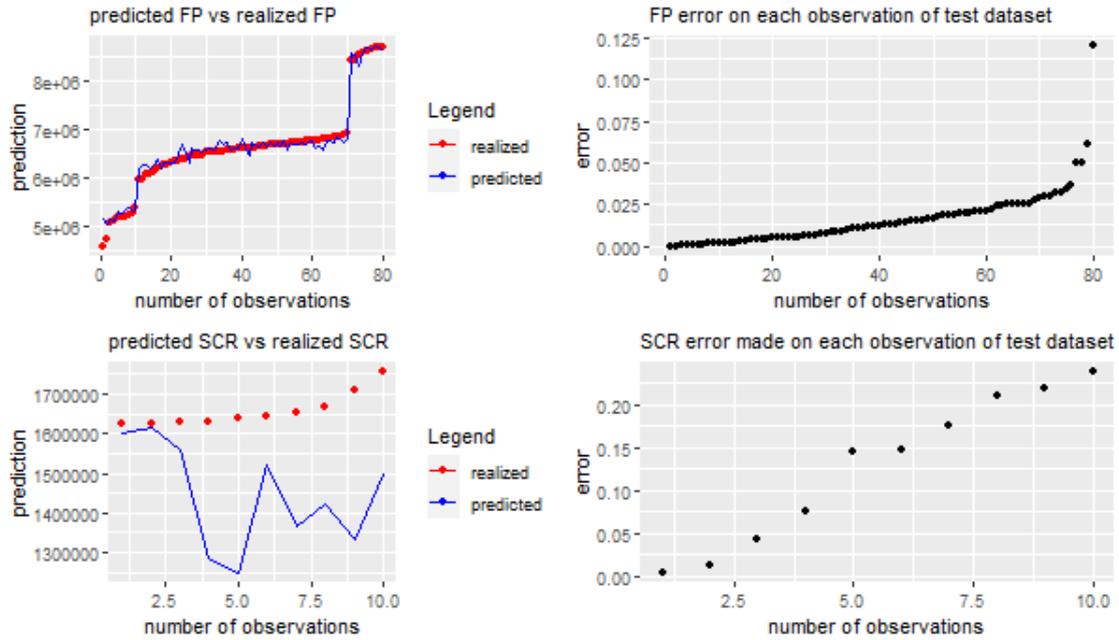
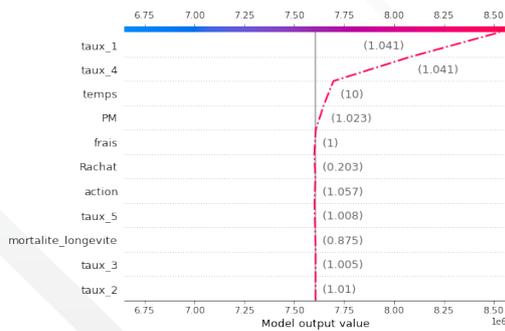


Figure 12 Illustration graphique des performances du Random Forest

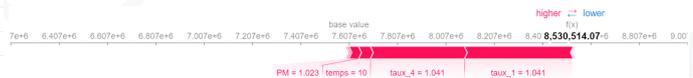
Ce modèle est le moins performant même après son optimisation par validation croisée avec un Grid Search.

Interprétation du modèle avec SHAP

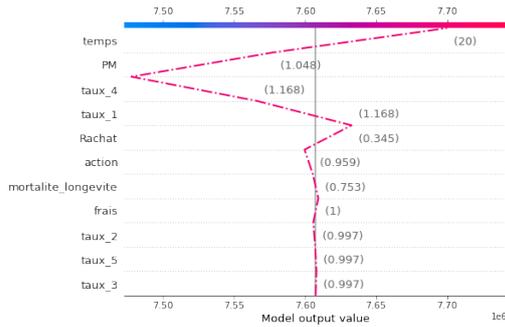
Pour ce modèle, nous avons réalisé des décision plot qui donnent comment les valeurs de Shapley s'ajoutent à l'espérance pour avoir la prédiction par observation, comme pour le waterfall plot. Les variables ayant un impact sur la prédiction dépendent de chaque observation :



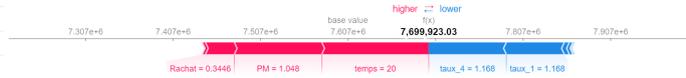
(a) Decision plot pour l'explication du FP central prédit par *Random Forest* de la période 10



(b) Force plot pour l'explication du FP central prédit par *Random Forest* de la période 10

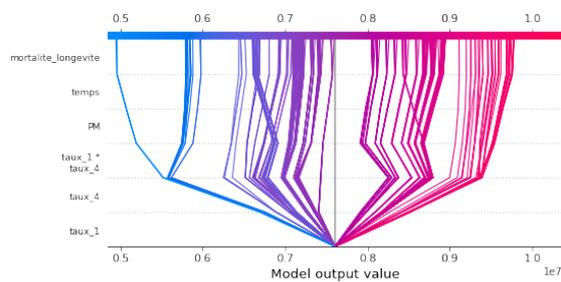


(a) Decision plot pour l'explication du FP central prédit par *Random Forest* de la période 20

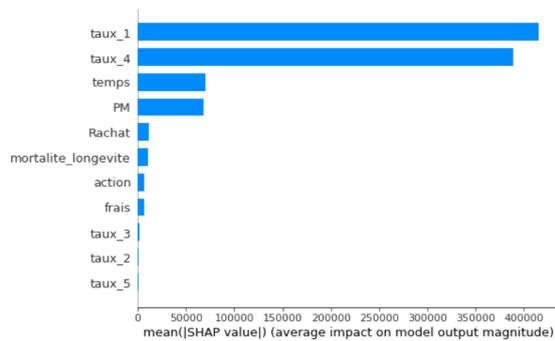


(b) Force plot pour l'explication du FP central prédit par *Random Forest* de la période 20

En effet, il est possible de réaliser des decision plot pour plusieurs observations en même temps.



(a) Decision plot avec interaction variables pour *Random Forest* avec plusieurs observations



(b) Importance des variables pour *Random Forest*

Les taux_1 et les taux_4 apparaissent comme étant les variables les plus importantes dans ce modèle.

5.4 Xgboost

Introduit par Freund et al. (1996), le Boosting est une des méthodes d'ensemble les plus performantes à ce jour. Étant donné un échantillon d'apprentissage \mathcal{L}_n et une méthode de prédiction (ou règle de base), qui construit sur \mathcal{L}_n un prédicteur $\hat{h}(\cdot, \mathcal{L}_n)$. Le principe du Boosting est de tirer un premier échantillon bootstrap $\mathcal{L}_n^{\Theta_1}$, où chaque observation a une probabilité $1/n$ d'être tirée, puis d'appliquer la règle de base pour obtenir un premier prédicteur $\hat{h}(\cdot, \mathcal{L}_n^{\Theta_1})$. Ensuite, l'erreur de $\hat{h}(\cdot, \mathcal{L}_n^{\Theta_1})$ sur l'échantillon d'apprentissage \mathcal{L}_n est calculée. Un deuxième échantillon bootstrap $\mathcal{L}_n^{\Theta_2}$ est alors tiré mais la loi du tirage des observations n'est maintenant plus uniforme. La probabilité pour une observation d'être tirée dépend de la prédiction de $\hat{h}(\cdot, \mathcal{L}_n^{\Theta_1})$ sur cette observation. Le principe est, par le biais d'une mise à jour exponentielle bien choisie, d'augmenter la probabilité de tirer une observation mal prédite et de diminuer celle de tirer une observation bien prédite. Une fois le nouvel échantillon $\mathcal{L}_n^{\Theta_2}$ obtenu, on applique à nouveau la règle de base $\hat{h}(\cdot, \mathcal{L}_n^{\Theta_2})$. On tire alors un troisième échantillon $\mathcal{L}_n^{\Theta_3}$, qui dépend des prédictions de $\hat{h}(\cdot, \mathcal{L}_n^{\Theta_2})$ sur \mathcal{L}_n et ainsi de suite. La collection de prédicteurs obtenus est alors agrégée en faisant une moyenne pondérée, là encore via des poids exponentiels bien choisis.

Performances du modèle sur la base test

Les performances de ce modèle sur la prédiction des fonds propres économiques de la base de test et qui serviront à calculer le SCR plus tard sont les suivantes :

Méthode	RMSE_FP	MRE_FP	RMSE_SCR	MRE_SCR
Xgboost	84 248	0.98%	66 403	5.81%

Table 6 Métriques sur FP et SCR pour Xgboost

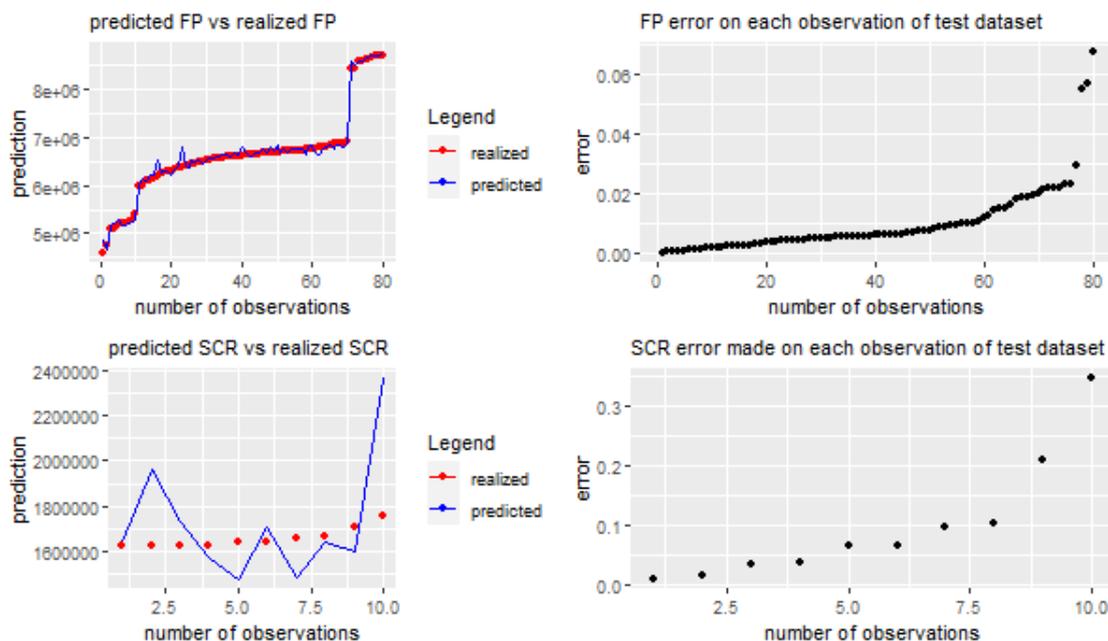
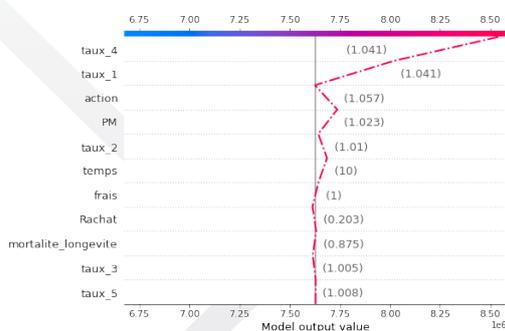


Figure 16 Illustration graphique des performances pour Xgboost

Ce modèle est performant sur la prédiction des fonds propres économiques mais il ne permet pas de bien prédire le SCR calculé avec ces fonds propres économiques.

Interprétation du modèle avec SHAP

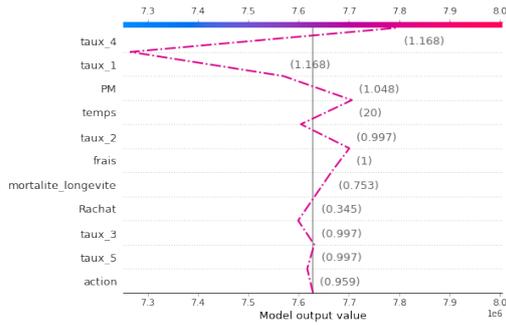
Nous avons réalisé des decision plot et des force plot pour deux observations différentes afin de voir comment les valeurs de Shapley contribuent à la prédiction des fonds propres économiques :



(a) Decision plot pour l'explication du FP central prédit par Xgboost de la période 10



(b) Force plot pour l'explication du FP central prédit par Xgboost de la période 10

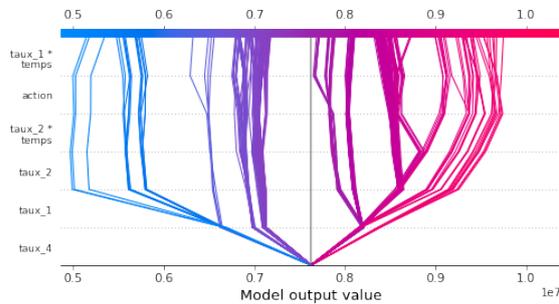


(a) Decision plot pour l'explication du FP central prédit par *Xgboost* de la période 20

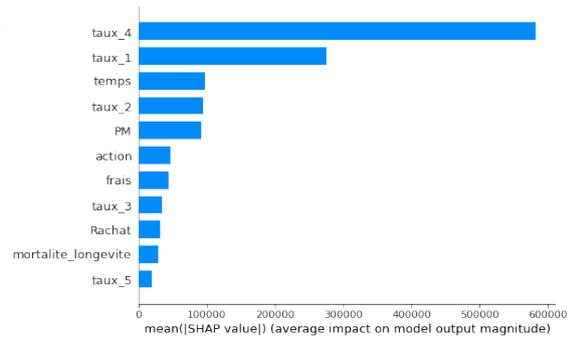


(b) Force plot pour l'explication du FP central prédit par *Xgboost* de la période 20

Nous avons aussi représenté des decision plot basés sur les variables explicatives et leurs interactions pour plusieurs observations, ce qui montre les différences dans le processus de prédiction pour chaque type d'observation :



(a) Decision plot avec interaction pour plusieurs observations de *Xgboost*



(b) Importance des variables pour *Xgboost*

Comme pour le modèle *Random Forest*, ce dernier modèle présente les mêmes variables importantes telles que : *taux_1* (taux court) et *taux_4* (taux long). Les taux d'intérêt du marché sont très importants pour des contrats investis sur des Fonds Euros. En effet la revalorisation de ces contrats (le taux minimum garanti et la participation aux bénéfices) dépend des revenus financiers issus des différents placements. Et comme l'allocation en part obligataire représente plus de 80% de la part totale, alors ces revenus financiers sont pour la plupart dépendant des coupons perçus. Notons que ces coupons sont indexés sur les taux d'intérêts en vigueur, donc la revalorisation des contrats dépend majoritairement des taux d'intérêt en vigueur du marché. Ainsi c'est donc logique d'avoir les variables de taux avec des importances considérables dans la variation des Fonds Propres économiques.

Afin de voir l'impact de la variable *taux_4* sur les prédictions des observations, nous avons sélectionné une observation que nous avons dupliquée plusieurs fois en maintenant toutes les variables constantes sauf *taux_4*. En effet, pour la variable *taux_4*, nous avons fait des tirages aléatoires. Nous avons réalisé des decision plot sur 100 observations de variables constantes sauf la variable *taux_4* :

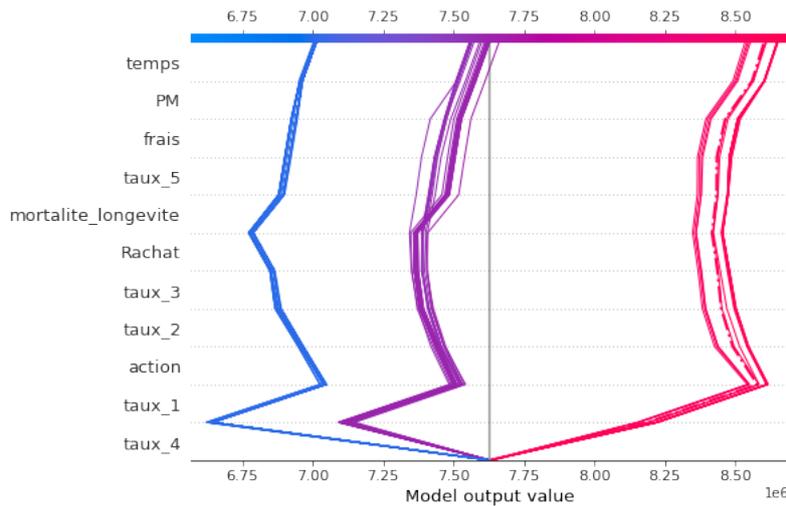


Figure 20 Impact du taux_4 sur la prédiction de FP d'une observation

Nous observons clairement des changements drastiques de prédiction pour ces 100 observations qui ne diffèrent que par la variable `taux_4`. Ce qui confirme l'importance de cette variable dans la volatilité des Fonds Propres.

5.5 Régression par processus gaussien

Nous avons appliqué la régression par processus gaussien qui permet de prendre en compte l'aléa introduit par les simulations de Monte Carlo. Pour la compréhension de ce modèle, le lecteur est renvoyé à l'article [R&D Nexialog \(2021\)](#).

Performances du modèle

Nous avons les métriques suivantes pour les performances du modèle de régression par processus gaussien sur la base de test :

Méthode	RMSE_FP	MRE_FP	RMSE_SCR	MRE_SCR
Kriging	53 296	0.38%	23 163	1.15%

Table 7 Métriques sur FP et SCR pour la régression par processus gaussien

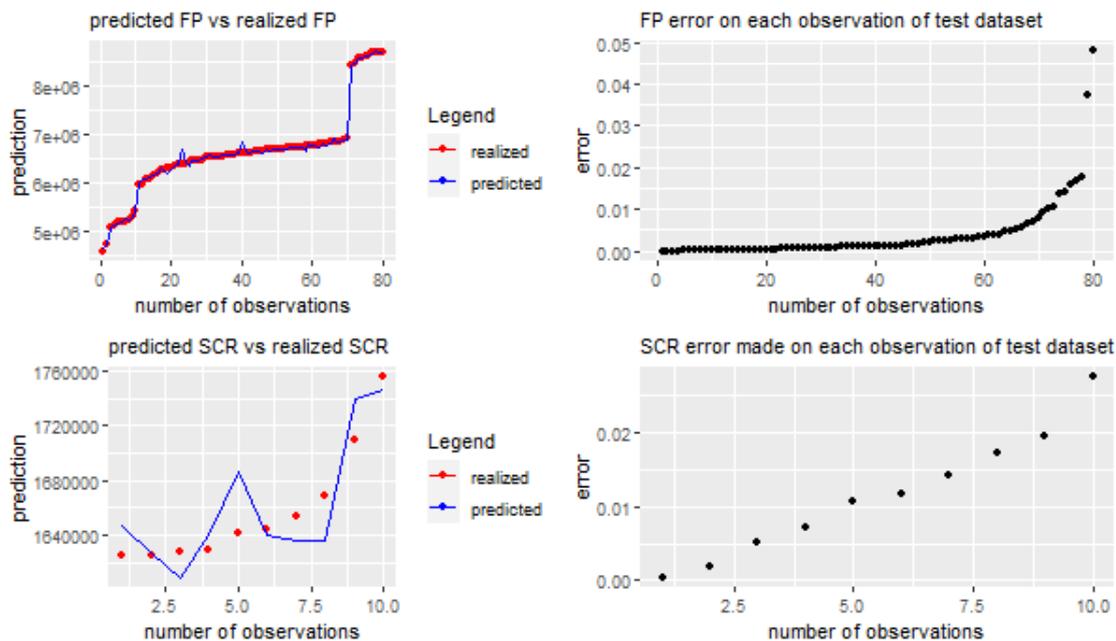


Figure 21 Illustration graphique des performances de la régression par processus gaussien

La régression par processus gaussien donne de bonnes performances sur la prédiction des fonds propres économiques et aussi sur le calcul du SCR. En effet sur les fonds propres économiques, on obtient une erreur de 0.3% mais sur les SCR, on obtient une erreur de 1%.

Sensibilité Kriging

Nous utilisons l'Algorithme 2 pour déterminer la distribution des sensibilités $(\hat{S}_{m,k,l}^{X^{d_1}})_{\substack{k=1,\dots,N_Z \\ l=1,\dots,B}}$ avec :

- $d_1 \in 1, \dots, N$ et N le nombre de variables explicatives dont on veut déterminer la sensibilité.
- N_z et B respectivement le nombre de simulation et le nombre de bootstrap pour la distribution de $(\hat{S}_{m,k,l}^{X^{d_1}})_{\substack{k=1,\dots,N_Z \\ l=1,\dots,B}}$.

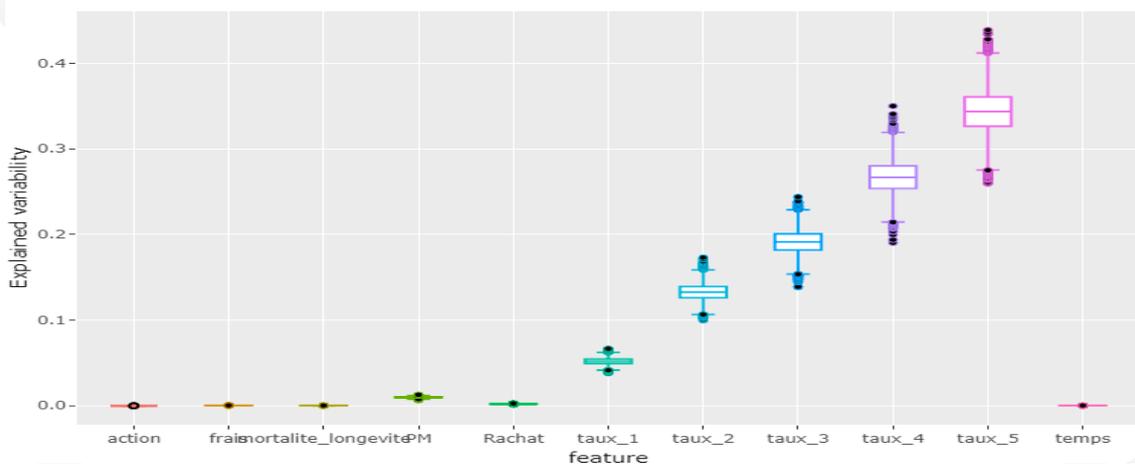


Figure 22 Distribution des sensibilités par variable explicative

On observe clairement que ce sont les différents taux qui apportent le plus de volatilité dans la prédiction des fonds propres économiques. Plus particulièrement, on remarque que la variable `taux_4` revient à chaque fois pour tous les modèles étudiés. En effet, le passif des contrats investis sur le Fonds euro ont une durée longue. Ainsi, les options et garanties qui caractérisent ces contrats ont de réels impacts sur le long terme donc dépendent fortement des taux long terme (`taux_4`) d'où le fait que ce risque revienne à chaque fois comme étant la variable la plus importante dans la plupart des modèles. Nous avons essayé de représenter les différentes variances introduites par la régression par processus gaussien et par l'approximation des intégrales des sensibilités par le bootstrapping :

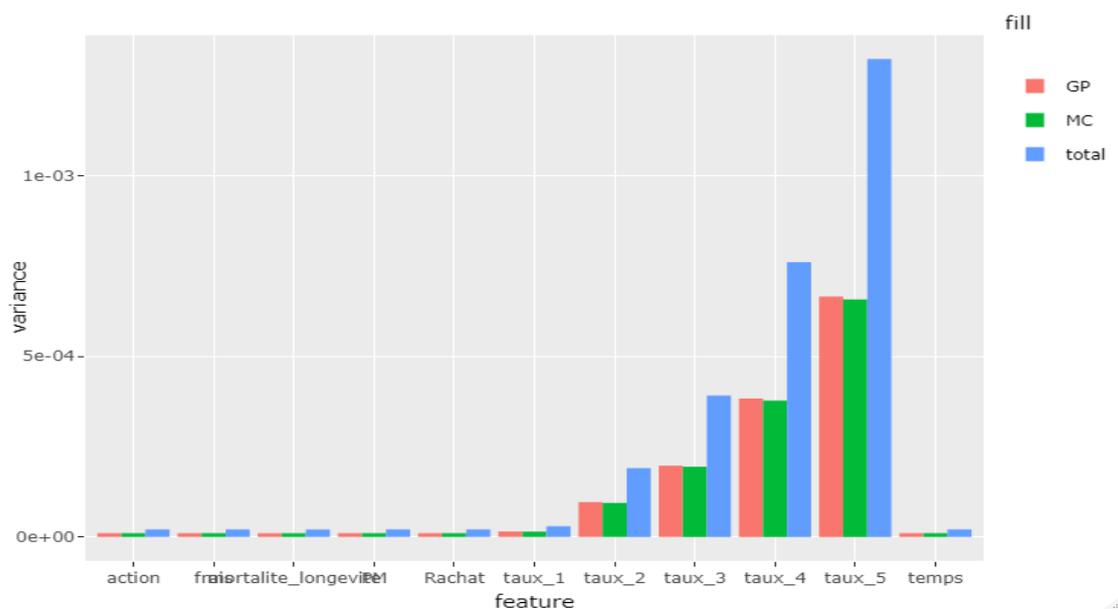


Figure 23 Variance des distributions de sensibilité

Nous avons des variances globalement faibles, seules les variances des sensibilités des variables taux sont les plus importantes. De plus, par souci de complexité d'algorithme, nous nous sommes arrêté à des valeurs faibles de m qui permet d'avoir $\hat{\sigma}_Z^2(\mathcal{S}_{m,n}^{X_1^{d_1}}) \geq \hat{\sigma}_{MC}^2(\mathcal{S}_m^{X_1})$.

5.6 Récapitulatif des différents algorithmes utilisés sur la base test

Nous présentons les différents algorithmes par ordre de performance croissante par rapport aux métriques choisies :

Méthode	RMSE_FP	MAE_FP	RMSE_SCR	MAE_SCR
Kriging	53 296	0.38%	23 163	1.15%
Régression polynomiale	72 830	0.61%	49 947	2.48%
Xgboost	84 248	0.98%	66 493	5.81%
Régression Ridge	86 071	1.02%	19 350	7.57%
Random Forest	134 860	1.59%	253 204	12.71%

Table 8 Résumé des métriques des différents modèles

Nous remarquons que la régression par processus gaussien donne les meilleures performances que ce soit sur la prédiction des fonds propres économiques centraux et choqués sur la base de test que sur le calcul du SCR même si une erreur de 1% reste quand même non négligeable.

6 Conclusion

Dans cet article, nous nous sommes intéressés à une méthodologie de calcul des FP centraux et choqués. De cette façon, nous avons pu calculer le SCR de manière dynamique, c'est-à-dire à une fréquence élevée (journalière, hebdomadaire) dans le but de permettre aux assureurs de suivre leur solvabilité et d'ajuster leur gestion des risques.

Les différentes étapes de la mise en place de cette approche sont décrites de la manière suivante :

- d'abord, nous avons construit une base d'apprentissage composée des QRTs passés donc des FP centraux et choqués et des facteurs de risque associés. Ces facteurs de risque ont été obtenus en utilisant des modèles de projection (GSE monde réel) permettant de répliquer leur évolution historique.
- ensuite, une fois la base construite, nous avons pu mettre en place différents modèles d'apprentissage afin de prédire les FP centraux et choqués des exercices futurs tout en faisant bien sûr des hypothèses sur l'évolution des facteurs de risque à ces différentes dates. De tous les méta-modèles mis en place, la régression par processus gaussien donne les meilleures performances sur la prédiction des fonds propres économiques et sur le SCR par rapport aux métriques retenues.
- enfin pour chaque méta-modèle mis en place, nous avons proposé des approches d'interprétation afin d'expliquer pour chaque date d'exercice, la prédiction obtenue et d'identifier les facteurs de risque qui impactent le plus cette prédiction. Cela pourrait permettre d'adapter la gestion de risque à chaque date, étant donné que les facteurs de risque les plus influents peuvent différer d'une date à une autre.

D'après notre étude, il ressort globalement que la déformation du risque de taux est le facteur qui explique le mieux la volatilité des Fonds Propres. La couverture de ce risque peut être réalisé à l'aide de produit dérivés de taux.

Références

- Amini, A., A. Abdollahi, M. Hariri-Ardebili, and U. Lall (2021). Copula-based reliability and sensitivity analysis of aging dams : Adaptive kriging and polynomial chaos kriging methods. *Applied Soft Computing* 109, 107524.
- Benoumechiara, N. and K. Elie-Dit-Cosaque (2019). Shapley effects for sensitivity analysis with dependent inputs : bootstrap and kriging-based algorithms. *ESAIM : Proceedings and Surveys* 65, 266–293.
- Croix, J.-C. (2015). Méta-modélisation par krigeage pour la mesure du risque de taux en ALM. *Mémoire d'actuariat, ISFA*.
- Devineau, L. and S. Loisel (2009). Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des «simulations dans les simulations» pour le calcul du capital économique solvabilité II. *Bulletin Français d'Actuariat* 10(17), 188–221.
- Gauville, R. (2018). Titre : Projection du ratio de solvabilité : des méthodes de machine learning pour contourner les contraintes opérationnelles de la méthode des sds.
- Le Gratiet, L., C. Cannamela, and B. Iooss (2014). A bayesian approach for global sensitivity analysis of (multifidelity) computer codes. *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification* 2(1), 336–363.
- Messoussi, A. (2017). Application d'algorithmes de machine learning pour l'estimation du ratio de couverture d'un assureur-vie détenteur d'un produit épargne. *Mémoire d'actuariat, ENSAE ParisTech*.
- Molnar, C. (2020). *Interpretable machine learning*. Lulu. com.
- Nexialog Consulting (2020). IFRS 17 Risk Adjustment : une étude comparative sur le périmètre des contrats d'épargne en euros.
- R&D Nexialog (2021). Calcul efficace du SCR modèle interne par krigeage stochastique.
- Warnes, J. J. (1986). A sensitivity analysis for universal kriging. *Mathematical Geology* 18(7), 653–676.

7 Annexes

Scénarios Monde reel

Action (CAC 40)

Nous avons réalisé nos travaux d'ajustement de loi sur les données historiques du CAC 40 collectées sur le site <https://fr.investing.com/indices/france-40-historical-data> allant de la période de Août 1987 à Avril 2020.

Les étapes de ce calibrage sont les suivantes :

Log rendements mensuels : La détermination de la série des log rendements mensuels se fait par la formule :

$$\log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right),$$

où S_t représente le prix du cac 40 au mois t.

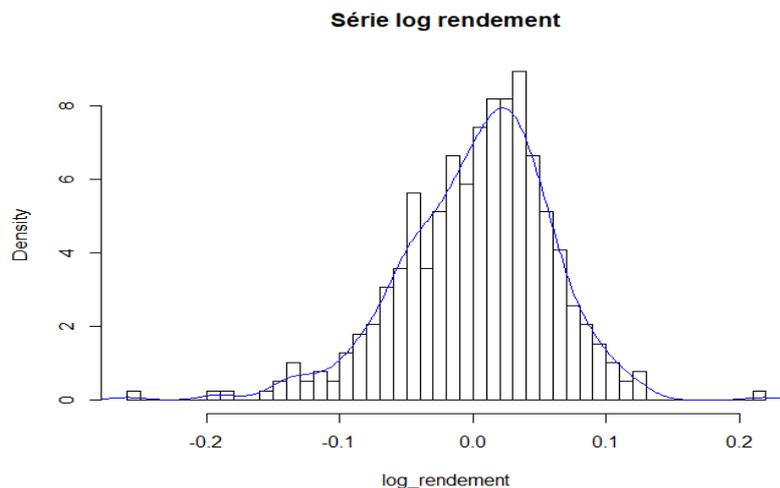


Figure 24 Histogramme et densité empirique

Histogramme de la série des log rendements : A la vue de cet histogramme, on peut en déduire que la loi ajustée doit être à queue épaisse car des observations sont présentes dans les queues inférieure et supérieure de la distribution, donc on pourrait penser qu'une loi normale ne conviendrait pas à cet ajustement.

Ajustement de loi : Compte tenu du support de la série, nous avons considéré deux lois ayant le même support :

- loi Normale
- loi de Student

La figure 27 montre les résultats de l'ajustement de ces deux lois.

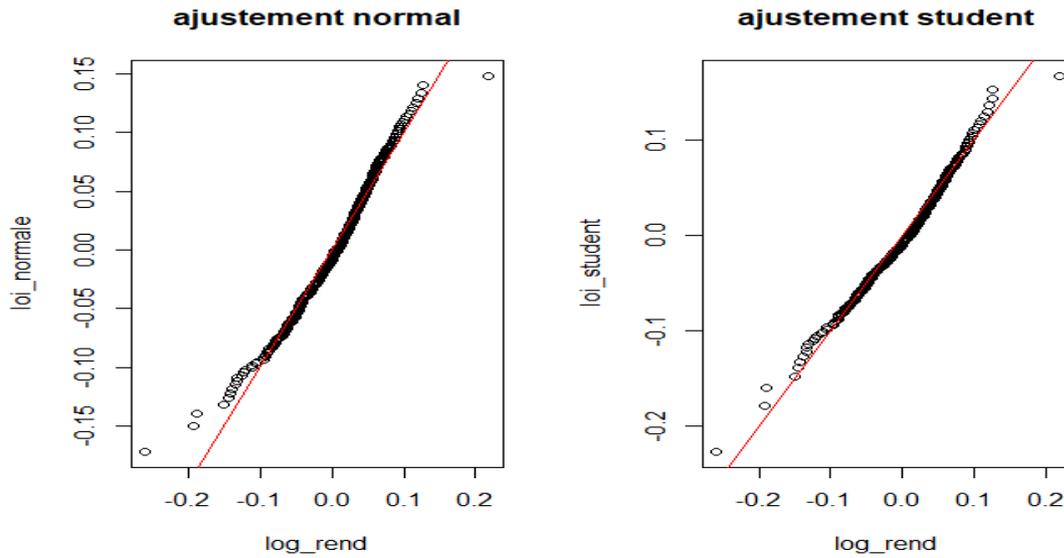


Figure 25 Quantile-Quantile Plot

	Student	normal
mle	577.3197	569.437
p_value	0.55	0.130

Table 9 pvalue et maximum de vraisemblance

Avec le *qqplot*¹, on remarque que la loi de Student s'ajuste mieux aux données surtout dans les queues de distribution et comme l'objectif du calibrage en monde réel est de trouver une loi qui s'ajuste non seulement dans le coeur de distribution mais aussi dans les queues, nous avons retenu la loi de Student pour le calibrage des chocs.

Avec le test du maximum de vraisemblance, on remarque que la loi de Student comparée à celle normale maximise le logarithme du maximum de vraisemblance.

Avec le test de Kolmogorov, on rejette l'hypothèse de normalité à un seuil de 13%.

Somme toute et comme pressenti, on rejette l'hypothèse selon laquelle la série des log rendements suit une loi normale au profit de la loi de Student à 7 degrés de liberté.

La figure 26 montre une comparaison des quantiles calibrés avec la loi de student et les quantiles empiriques.

1. qqplot : *Quantile-Quantile-Plot*

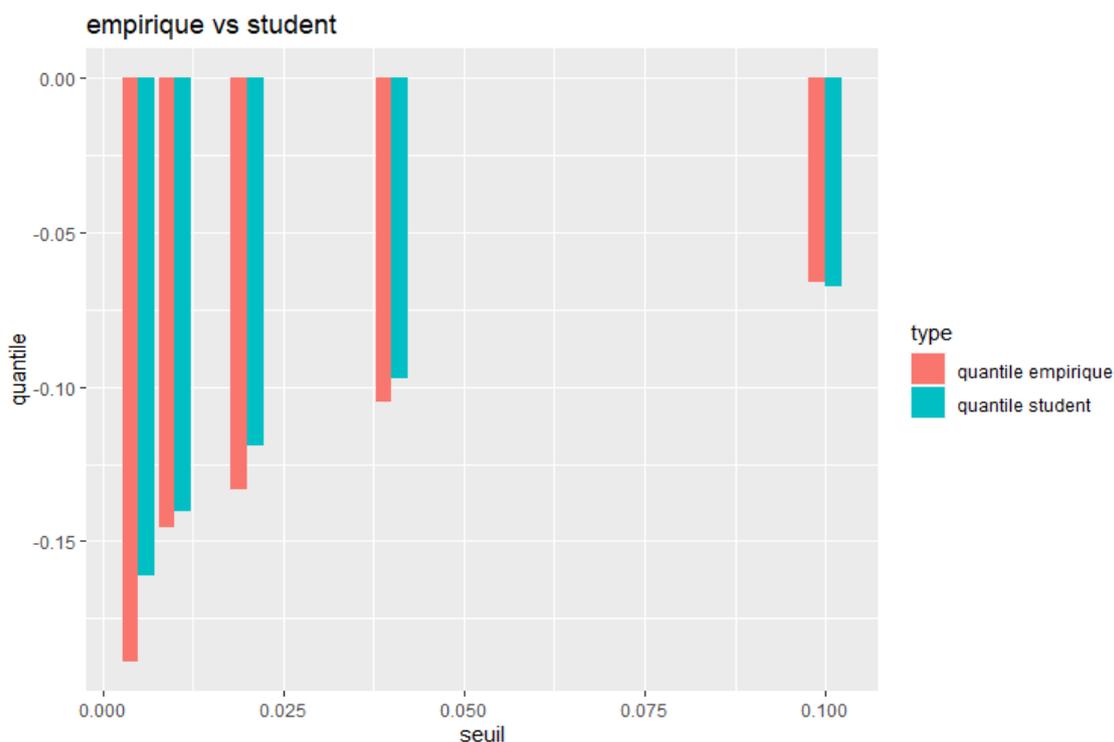


Figure 26 quantile empirique mensuel vs quantile student

En observant bien la figure 26, on remarque que les quantiles calibrés pour différents seuils sont proches des quantiles empiriques.

Calibration historique des taux avec ACP

Les données zéro coupon utilisées pour la calibration de l'évolution historique des taux ont été extraites sur le site <http://www.cnofrance.org/fr/courbes-des-taux-zéro-coupon.cfm>. Ce sont des données mensuelles allant de la période de Février 2012 à Avril 2020. Ces données ont été retraitées pour les maturités non liquides car la méthode d'extrapolation des zéros coupons pratiquée sur le site n'est pas la même que celle préconisée par l'EIOPA.

Ainsi, pour les maturités supérieures à 20 ans supposées non liquides, il a fallu extrapoler les zéros coupons avec la méthode de Smith Wilson en utilisant comme paramètres :

- UFR= 0.0375
- $\alpha = 0.1348$, avec α vitesse de convergence des taux forward vers l'UFR.

Après avoir retraité les taux zéros coupons, nous avons appliqué une analyse en composantes principales sur la matrice définie par :

$$dR = (dr_{tm}) = \frac{dr(t, T_m) - \overline{dr(., T_m)}}{\sqrt{N} \times \sigma_{dr(., T_m)}} \quad t = 1..N; m = 1..30 \quad (7)$$

avec :

- $dr(t, T_m)_{m=1..30; t=1..N}$ la matrice de variation des taux de différentes maturités
- $\overline{dr(., T_m)}$ la moyenne de la matrice par maturité
- $\sigma_{dr(., T_m)}$ l'écart type des taux par maturité
- $dR_{m=1..30; t=1..N}$ la matrice des log rendements centrés et réduits

L'ACP réalisée sur la série $dR_{t,m}$ nous indique que trois axes principaux expliquent la volatilité des taux à hauteur de 99% comme le montre le tableau 10.

Axes principaux	Variance cumulée expliquée
1	97.243%
2	99.656%
3	99.941%

Table 10 Pourcentage d'inertie expliquée

Nous constatons que la variation des taux est induite par trois facteurs dont :

- le facteur de niveau (axe 1)
- le facteur expliquant la pente de la courbe des taux (axe 2)
- le facteur de courbure ou de convexité (axe 3)

Ces trois facteurs sont résumés dans la figure suivante :

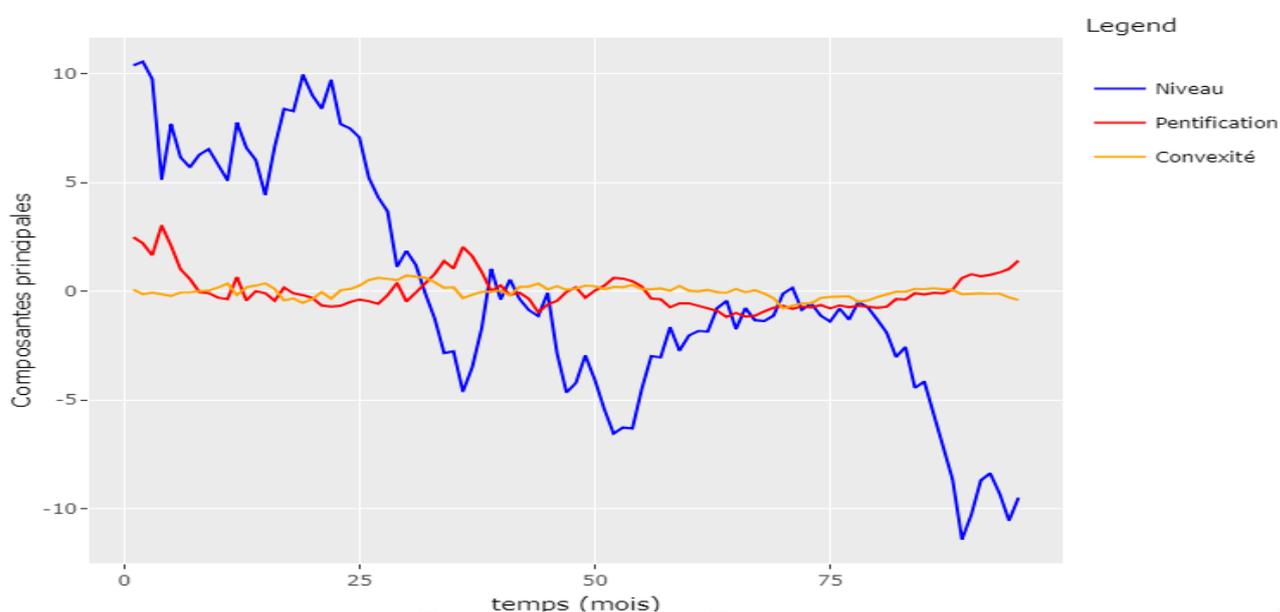


Figure 27 Facteur explicatif de la variation des taux

Le facteur de niveau décroît avec le temps, ce qui est en adéquation avec les niveaux de taux actuels qui ont drastiquement chuté ces dernières années.

On peut donc réaliser notre projection sur les trois premiers axes principaux sans perdre d'informations liées à la volatilité de la courbe des taux.

Les différents individus (les instants d'observation) sont projetés dans le nouvel espace en utilisant l'expression suivante :

$$dR(t, \cdot) = c_1^t * \vec{e}_1 + c_2^t * \vec{e}_2 + c_3^t * \vec{e}_3 \tag{8}$$

avec :

- c_i^t la composante principale à la date t sur l'axe principal i
- \vec{e}_i le vecteur de l'axe principal i

Ainsi, modéliser le comportement des taux revient donc à modéliser les composantes principales. Pour ce faire, nous allons essayer plusieurs approches d'ajustement dont celle d'un modèle de séries temporelles à partir des composantes principales.

Bien avant la calibration des modèles de séries temporelles sur les différentes composantes principales, on a réalisé des tests de racine unitaire pour vérifier la stationnarité des différentes composantes principales car sans cette condition, on ne pourrait pas ajuster de modèles de séries temporelles.

Composantes principales	Valeur statistique	Valeur critique à 10%	Décision du test
1	-1.3242	-1.95	Présence de racine unitaire
2	-3.1303	-1.95	Pas de racine unitaire
3	-3.0446	-1.95	Pas de racine unitaire

Table 11 Test de stationnarité

Deux hypothèses sont testées avec le test de racine unitaire ci-dessous :

- H0 : Présence de racine unitaire donc série non stationnaire.
- H1 : Série stationnaire.

H0 est acceptée si la statistique calculée est inférieure en valeur absolue à la valeur critique liée au seuil d'erreur autorisée.

La table 11 donne les résultats du test.

Cependant on va supposer que les composantes 2 et 3 sont non stationnaires du fait de la proximité entre la valeur du test et le quantile à 10%. On se retrouve donc dans l'incapacité de les modéliser par des modèles de type séries temporelles.

il est souvent recommandé d'ajuster un processus de retour à la moyenne dont la dynamique est régie par l'EDS suivante :

$$dX_t = \lambda(\mu - X_t) dt + \sigma dW_t$$

avec :

- λ : l'intensité de retour à la moyenne des taux.
- μ : le niveau moyen des taux à long terme.
- σ : la volatilité instantanée du taux court.

En effectuant le changement de variable $Y_t = \exp(\lambda t)X_t$, l'EDS précédente a pour solution :

$$X_t = e^{-\lambda t} X_0 + \mu(1 - e^{-\lambda t}) + \int_0^t e^{\lambda(u-t)} dW_u$$

$$X_{t+\delta} = e^{-\lambda\delta} X_t + \mu(1 - e^{-\lambda\delta}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\lambda\delta}}{2\lambda}} N(0, 1)$$

Ainsi, en réalisant une régression linéaire de la variable $X_{t+\delta}$ sur X_t , on pourrait non seulement calibrer les paramètres du modèle mais aussi les diffuser sur un horizon d'un an.

Composantes principales	λ	μ	σ
1	0.03322241	6.159886	1.311255

Composantes principales	λ	μ	σ
2	0.1643662	0.07669604	0.4276208

Composantes principales	λ	μ	σ
3	0.211182	0.01794337	0.1955159

Table 12 Calibration paramètres Vasicek par régression linéaire

Le tableau 12 montrent les paramètres calibrés pour chaque composante principale.

Le graphe 28 nous montre les scénarios du niveau de la courbe des taux obtenus avec le modèle de Vasicek pour un horizon de temps d'un an.

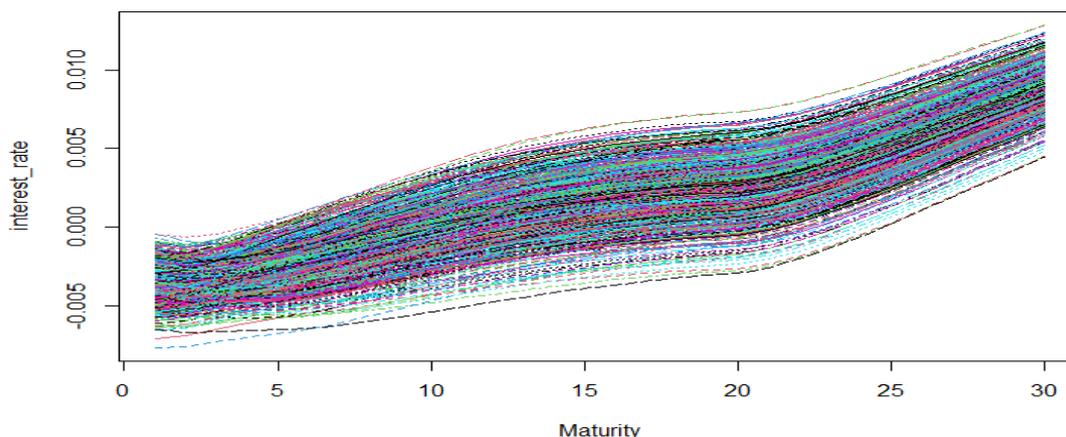


Figure 28 Diffusion des taux en monde réel

En effet on remarque dans ces scénarios obtenus, que les taux sont toujours très bas et qu'on enregistre des taux négatifs pour des maturités allant jusqu'à $M = 10$, ce qui illustre très bien les niveaux actuels des taux sur le marché.

Corrélation entre les risques financiers

Dans le but de prendre en compte la structure de dépendance entre les différents risques financiers, nous avons donc déterminé la matrice de corrélation sur l'historique disponible des taux et des actions. Cette structure concerne les risques suivants :

- les rendements action R
- le facteur de translation β_1
- le facteur de pentification β_2
- le facteur de convexité β_3

Ainsi les corrélations estimées empiriquement du vecteur $(R, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ se présentent comme suit :

	R	β_1	β_2	β_3
R	1.000	-0.157	0.088	-0.255
β_1	-0.157	1.000	-0.936	0.681
β_2	0.088	-0.9363695	1.0000000	-0.6282990
β_3	-0.25518216	0.6817659	-0.62829895	1.0000000

Table 13 Matrice de corrélation

On remarque que les différentes composantes sont très corrélées entre elles, tandis que les log rendements des actions sont négativement corrélés avec les facteurs de niveau et de convexité de la courbe des taux.

Mortalité

Pour la calibration et la projection du facteur de risque de mortalité, nous nous sommes appuyés sur l'approche développée dans l'article [Nexialog Consulting \(2020\)](#).

Rachat

Nous avons des tables de loi de rachat calibrée sur l'ancienneté des contrats. Cette loi par ancienneté est une loi centrale de rachat, ainsi pour appliquer les chocs sur les rachats, il nous suffit de simuler des déformations à appliquer à cette loi de référence. Ainsi, nous obtiendrons des scénarios choqués de loi de rachat qui nous permettraient dans un second temps de valoriser les engagements des assureurs dans un environnement de stress.

Scénarios risque neutre

Nous proposons dans cette partie une calibration des facteurs de risque financiers en utilisant les prix des produits dérivés cotés sur le marché. L'idée est de refléter les différentes évolutions possibles de ces facteurs comme le marché les anticipe.

En effet :

- pour les actions, nous avons opté pour le modèle d'Heston du fait de sa volatilité stochastique :

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^1 \\ dV_t = \kappa (\theta - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t^2 \\ dW_t^1 dW_t^2 = \phi dt \end{cases} \quad (9)$$

Le processus de calibrage du modèle d'Heston est de déterminer les paramètres optimaux : $\kappa, \theta, \sigma, \phi$ en minimisant une fonction de perte qui est égale la somme des écarts au carré entre le prix théorique des options du modèle et le prix de marché de ces options. Ces options peuvent être des calls ou des puts.

- pour les taux, nous avons opté pour le modèle G2++ pour ses propriétés d'ajustement à la structure initiale de la courbe des taux et de simulation des taux négatifs compatibles au contexte actuel.

En effet, la dynamique du taux court suit l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dx_t = -ax_t dt + \sigma dW_t^1 \\ dy_t = -by_t dt + \eta dW_t^2 \\ dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt \\ dr_t = \phi_t + x_t + y_t \end{cases} \quad (10)$$

Le processus de calibrage du modèle G2++ est de déterminer les paramètres optimaux : a, b, σ, η, ρ en minimisant une fonction de perte qui est égale la somme des écarts au carré entre le prix théorique des swaptions du modèle et le prix de marché des swaptions.

Caractéristiques des MP projetés

Les différents MP projetés présentent les caractéristiques suivantes :

MP	Produit	Maille	Nbre de Polices	Naissance	Sexe	Début contrat	TMG	Durée TMG	PM	Primes
1	P1	P1	100	1959	H	2007	0%	2	101 828	500
2	P1	P1	100	1960	F	2006	1%	3	101 828	500
3	P1	P1	100	1961	F	2005	3%	4	101 828	500
4	P1	P1	100	1962	H	2004	2%	5	101 828	500
5	P1	P1	100	1963	H	2003	3%	6	101 828	500
6	P2	P2	100	1964	H	2010	3%	7	101 828	500
7	P2	P2	100	1965	H	2011	1%	8	101 828	500
8	P3	P3	100	1966	F	2008	2%	9	101 828	500
9	P3	P3	100	1967	F	2007	2%	10	101 828	500
10	P3	P3	100	1968	F	2015	1%	11	101 828	500
11	P3	P3	100	1969	F	2019	2%	12	101 828	500
12	P3	P3	100	1970	F	2007	4%	15	101 828	500

Table 14 Caractéristiques MP

Les différents chargements, commissions et frais appliqués sur les primes et encours en fonction des mailles des différents MP sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

Maille	Chargements	Chargements sur encours	Chargements sur primes
P1		0,60%	10%
P2		0,60%	10%
P3		0,60%	10%

Table 15 Chargements

Frais et commissions	frais d'administration	frais de gestion	commission sur encours	commission sur primes
P1	1	1,5	0,10%	1,00%
P2	1	1,5	0,10%	2,00%
P3	1	1,5	0,10%	3,00%

Table 16 Frais et commission

Nexialog Consulting est un cabinet de conseil spécialisé en Banque et en Assurance. Organisés autour de 3 domaines d'activité - Risques Bancaires, Financiers & Assurantiels - nous intervenons au sein des équipes métiers afin de les accompagner depuis le cadrage jusqu'à la mise en œuvre de leurs projets. Associant innovation et expertise, le savoir-faire de notre cabinet a permis de consolider notre positionnement sur ce segment et de bénéficier d'une croissance forte et régulière.

Les besoins de nos clients étant en constante évolution, nous nous adaptons continuellement pour proposer le meilleur accompagnement. Le département R&D de Nexialog Consulting se donne pour objectif de proposer des solutions innovantes à des problématiques métier ou d'actualité. Pour cela, nous nous appuyons sur des bibliothèques internes et sur le travail de nos consultants. Le pôle R&D Nexialog a également pour mission de former les collaborateurs sur l'évolution des techniques et la réglementation en lien avec leur activité.

Site web du cabinet : <https://www.nexialog.com>

Publications : <https://www.nexialog.com/publications-nexialog/>

Contacts

Ali BEHBAHANI
Associé, Fondateur
Tél : + 33 (0) 1 44 73 86 78
Email : abehbahani@nexialog.com

Christelle BONDOUX
Associée, Directrice commerciale
Tél : + 33 (0) 1 44 73 75 67
Email : cbondoux@nexialog.com

Habib FAYE
Manager R&D actuariat
Email : hfaye@nexialog.com

Areski COUSIN
Expert scientifique
Email : acousin-ext@nexialog.com