nexialog CONSULTING

NEXIASEARCH

ALTERNATIVE AU FONDS EN EUROS

Tarification d'une option protégeant le capital à terme sur une gestion à horizon adaptée au Plan d'Epargne Retraite individuel.

Eric BAESEN

THINK SMART ACT DIFFERENT

TABLE DES MATIÈRES

Abstract ____ 3

Introduction ____ 4

Rappel sur le contexte de la loi Pacte & la création du PERin ____ 5

a. La possibilité de sortie en capital au moment du départ à la retraite ____ 5

b. La gestion pilotée ____ 5

c. Trois profils d'investissement possibles pour l'horizon retraite ____ 6

2. Périmètre de l'étude ____ 7

3. Tarification de la prime pure liée à la garantie plancher en cas de vie ____ 7

a. Comportement de l'assuré ____ 8

i. Les rachats ____ 8

ii. Les décès ____ 8

b. Engagement de l'assuré ____ 9

c. Engagement de l'assureur ____ 9

d. Expression de la tarification ____ 10

i. Equation à satisfaire ____ 10

ii. Existence et unicité d'une solution ____ 11

iii. Recherche de solution & solution approchée ____ 13

4. Modélisation des actifs ____ 14

5. Illustration dans le cadre d'une gestion à l'horizon ____ 16

Conclusion ____ 18

ABSTRACT

Dans le cadre de la loi Pacte, le Plan d'Epargne Retraite individuel (PERin), remplaçant du PERP et Madelin depuis le 1er octobre 2019, bénéficie de la possibilité de sortir en capital au moment du départ à la retraite. Dans cette étude, la gestion pilotée (option par défaut) lors de l'ouverture d'un PER est composée d'une allocation entre deux poches, une poche UC (à dominante actions a priori) et une poche fonds en Euros.

Avec une échéance clairement identifiée comme la retraite, une gestion optimisée par rapport à cet horizon (du type « target-date fund ») semble particulièrement bien adaptée. Toutefois, ce type de gestion ne bénéficie pas de la garantie du capital contrairement à un investissement uniquement en fonds en Euros (ou garantie partielle car pour un assureur sur deux la garantie ne porte plus que sur 99% ou moins des sommes versées). Ainsi, l'ajout d'une garantie de tout ou partie du capital à l'échéance semble être un élément décisif pour inciter l'assuré à épargner autrement qu'en allouant 100% en fonds en Euro. Cette étude permet d'estimer le coût d'une option garantissant ou protégeant partiellement le capital à terme, sous forme d'un taux de chargement sur encours, s'appliquant à une allocation diversifiée évolutive.

Le coût de cette garantie devant rester limité pour l'épargnant, nous proposons de définir l'évolution de la part en UC de façon à maintenir un taux annuel de chargement du coût de la garantie plafonné (à 1% par exemple) quel que soit le nombre d'années restant jusqu'à la retraite lors de chaque versement.

Le résultat est sensible aux hypothèses, sur la courbe de taux sans risque, sur la performance attendue du fonds en Euro et de l'UC. En particulier, à l'évidence, si le taux sans risque est négatif, il n'y aura pas de solution pour garantir le capital (avec les conditions de marché au 31/12/2021, il faut baisser le niveau de protection à 99%). Cela dépend également du profil d'investissement horizon retraite. A titre d'exemple, pour un profil dynamique, une protection à 94% et un coût de la garantie plafonné à 1,2% par an, la part UC commencerait à s'éloigner des 100% à 10 ans de l'échéance pour décroitre régulièrement jusqu'à 50% d'UC et 50% de fonds en € la dernière année.

A l'autre extrême, le profil prudent est compatible avec une protection à 99% et un coût de la garantie plafonné à 0,15% par an. La part UC commencerait à s'éloigner du plafond de 70% à 21 ans de l'échéance pour décroitre régulièrement jusqu'à 10% d'UC et 90% de fonds en € la dernière année.

Cette solution d'investissement est une réelle alternative au fonds en € puisqu'une surperformance de l'UC de l'ordre de 1% suffit pour battre le fonds en €.

INTRODUCTION

L'encours des produits d'épargne retraite représentait à fin 2018, selon les dernières données publiées par le service statistique du ministère du Travail (DARES), **237 milliards d'euros**.

Cet encours comprenait celui des produits d'épargne retraite individuels comme le PERP, les Contrats Madelin, la Préfon ou le COREM et celui des produits collectifs comme le PERCO, le PERE (anciennement article 83) ou les retraites chapeaux (article 39).

Cette épargne retraite est majoritairement investie dans des actifs peu risqués qui rapportent tellement peu que cela les expose à l'érosion du capital du fait de l'inflation et des frais de gestion.

I. Rappel du contexte de la loi Pacte et la création du PERin

Possibilité de sortie en capital au moment du départ à la retraite

Dans le cadre de la **loi Pacte**, le **Plan d'Epargne Retraite individuel (PERin)**, remplaçant notamment le PERP et le Madelin depuis le 1er octobre 2019 a vu son attractivité renforcée par plusieurs mesures :

- Une plus grande liberté pour utiliser son épargne avec la **possibilité de sortie en capital** au moment du départ à la retraite (et plus seulement en rente) et la possibilité de sortie anticipée pour l'achat de la résidence principale.
- Une portabilité totale des produits d'épargne retraite.
- Des règles de fonctionnement communes et une fiscalité harmonisée et attractive pour tous les produits (individuels ou collectifs).

La gestion pilotée

La **loi Pacte** comporte, aussi, une mesure **pour orienter cette épargne vers l'économie productive** et améliorer les perspectives de rendement des futurs retraités. Ainsi, la **gestion pilotée** est proposée comme option par défaut lors de l'ouverture d'un PER (avec au moins une deuxième option permettant d'investir en fonds solidaire). Cette modalité de gestion qui existait déjà pour les plans d'épargne retraite collective (PERCO) est nouvelle pour les plans individuels. Le texte indique que « sauf mention contraire et expresse du titulaire, les versements sont affectés selon une allocation de l'épargne permettant de **réduire progressivement les risques financiers** ».

La gestion pilotée est une stratégie d'investissement qui **tient compte de l'horizon de placement de l'épargnant**. Afin de sécuriser progressivement le capital, la part investie dans des actifs à faible risque augmente à mesure que la date de la retraite approche. Ainsi, lorsque la retraite est encore lointaine, l'épargne est fortement investie en actions, puis progressivement investie dans des supports garantis (fonds en euros ou euro-croissance) ou des supports obligataires ou monétaires. Pour cela, l'assureur procède régulièrement à des arbitrages.

Trois profils d'investissement possibles pour l'horizon retraite

Selon l'article L.224-3 du Code Monétaire et Financier : « Les allocations permettant de réduire progressivement les risques financiers correspondent à des profils d'investissement adaptés à un horizon de long terme. La qualification de ces profils tient compte du niveau d'exposition aux risques financiers et de l'espérance de rendement pour le titulaire, dans des conditions précisées par un arrêté du ministre chargé de l'économie. »

L'Arrêté du 7 août 2019 portant application de la réforme de l'épargne retraite définit 3 profils d'investissement pour les allocations permettant de réduire progressivement les risques financiers : « prudent horizon retraite », « équilibré horizon retraite » ou « dynamique horizon retraite ».

	Profil		
Durée restante avant le départ en retraite de l'épargnant	Prudent horizon retraite	Equilibré horizon retraite	Dynamique horizon retraite
Plus de 10 ans	30 %	Pas de minimum exigé	Pas de minimum exigé
5 à 10 ans	60%	20%	Pas de minimum exigé
2 à 5 ans	80%	50%	30%
Moins de 2 ans	90%	70%	50%

Tableau 1. *Part minimale de l'épargne investie en placements à faible risque prévue par la réglementation, par rapport à l'encours du plan, pour chaque profil d'investissement.*

Le profil « équilibré horizon retraite » est le profil retenu par défaut.

II. PÉRIMÈTRE DE L'ÉTUDE

L'étude se concentre sur la **tarification d'une garantie plancher (ou Option Capital Protégé) en cas de vie au terme du contrat**. La terminologie anglo-saxonne associée pour un Variable Annuity (le niveau de rente dépend de la performance du véhicule d'investissement) est Guaranteed Minimum Maturity Benefit (GMMB) et est aussi connue sous le nom Guaranteed Minimum Accumulation Benefit (GMAB). Plus particulièrement, nous nous plaçons dans le contexte où cette garantie de tout ou partie (95% ou 98% par exemple) du capital serait associée à un PERin **obéissant aux règles de la gestion pilotée avec typiquement un profil « équilibré horizon retraite »**.

A la date d'échéance du contrat coïncidant potentiellement avec la date de départ en retraite, l'assureur paiera au bénéficiaire, la différence (lorsqu'elle est positive) entre un pourcentage des versements cumulés (minorée des éventuels rachats) et la valeur de l'épargne (valeur du compte individuel de l'assuré).

Les assurés versent une prime unique à la souscription du contrat et disposent d'une option de rachat leur permettant de récupérer à tout moment leur épargne diminuée d'une éventuelle pénalité.

III. TARIFICATION DE LA PRIME PURE LIÉE À LA GARANTIE PLANCHER EN CAS DE VIE

La garantie (partielle) du capital en cas de vie se traduit, **au terme du contrat**, par le versement d'un capital minimum, correspondant à une fraction du cumul des primes versées (corrigée des éventuels rachats), et ce quelle que soit la valeur de l'épargne (valeur du compte individuel de l'assuré) détenue à cette date.

Ainsi l'assureur viendra compléter l'épargne du bénéficiaire, en payant la partie positive de la différence entre ce capital minimum et la valeur de l'épargne au terme du contrat. Ce calcul de prime pure liée à la garantie plancher en cas de vie (GMMB) s'apparente, donc, à un **calcul du prix d'un put européen**.

Le coût de ces garanties est, généralement, supporté par l'assuré sous forme de chargement sur encours λ en même temps que d'autres chargements qui sont ici ignorés par souci de simplification. Ainsi, suite à t années, la valeur de l'encours s'écrit :

$V(t) = (1-\lambda)^t \cdot X(t)$ avec $X(t)$ la valeur apportée par le portefeuille ne supportant aucun coût.

Comportement de l'assuré

Compte tenu de l'échéance très lointaine du contrat, nous ne pourrons supposer que tous les contrats iront jusqu'à leur terme. Nous prendrons en compte les anticipations des décès et des rachats dans l'évaluation des engagements futurs de l'assureur et de l'assuré.

Toutefois, dans le cadre d'un contrat en UC avec garantie, le risque viager (décès et survie) et le risque de rachat sont bien moindres que le risque de marché.

i. Les rachats

Le rachat est une option contractuelle permettant au souscripteur de retirer tout ou partie de la provision mathématique de son contrat durant une période prédéfinie. En cas de rachat massif, l'assureur enregistrera un manque à gagner en termes de frais de gestion, mais il n'aura plus à payer la garantie plancher. Il verse $V(t)$, la valeur épargnée, sur le compte individuel de l'assuré à la date t interrompant l'engagement de garantie plancher.

En supposant, également, l'absence de pénalité en cas de rachat, nous pouvons négliger les rachats puisqu'ils se limitent alors à réduire l'assiette du contrat .

i. Les décès

Le type d'option de garantie UC que nous considérons ici (GMMB) n'offre qu'une garantie en cas de vie. Il ne comporte donc pas de garantie plancher en cas de décès dite GMDB (Guaranteed Minimum Death Benefit). Ainsi, en cas de décès, l'assureur ne verse au bénéficiaire que la provision mathématique du contrat sans application de la garantie plancher.

Toutefois, pour prendre en compte le risque de décès, nous pouvons utiliser une table de mortalité réglementaire.

L'engagement de l'assuré

L'assuré s'engage donc à payer une prime (annuelle, par exemple) pendant la durée du contrat, tant qu'il n'a pas racheté et s'il est vivant. Comme discuté précédemment, cette prime prend la forme d'un versement sur encours.

Soit $P_a^{Life}(i_t)$ la probabilité de survie dans le contrat d'un individu d'âge a pour l'année i_t . Pour se maintenir dans le contrat un individu doit être vivant et ne pas avoir racheté.

Le flux probable payé par l'assuré l'année i_t au titre de la garantie plancher s'écrit comme suit

$$\lambda \cdot V(i_t) \cdot P_a^{Life}(i_t).$$

La Valeur Actuelle Probable (Best Estimate) de l'engagement de l'assuré jusqu'à l'échéance T est le cumul des frais payés chaque année numérotée de 0 à $i_T - 1$, soit

$$BE_{Assuré}(t_0 \to T) = \lambda \cdot \sum_{i_t=0}^{i_T-1} P_a^{Life}(i_t) \cdot E[DF(i_t) \cdot V(i_t)],$$

en supposant l'indépendance entre le maintien dans le contrat et les marchés financiers.

Nous avons vu que $V(i_t) = (1-\lambda)^{i_t} \cdot X(i_t)$, avec $X(i_t)$ la valeur (l'année i_t) du portefeuille ne supportant aucun coût.

Or l'année i_t , la valeur actualisée de ce portefeuille sans coût (qui est une martingale sous la mesure risque-neutre) est équivalente à sa valeur initiale. Ainsi, il suffit de diminuer la valeur initiale de l'épargne de la dérive liée aux frais de la garantie $(1-\lambda)^{i_t}$ sur les i_t années précédentes, ce qui donne $E[DF(i_t) \cdot V(i_t)] = V(t_0) \cdot (1-\lambda)^{i_t}$. Ainsi, la VAP de l'engagement de l'assuré s'écrit :

$$BE_{Assuré}(t_0 \to T) = \lambda \cdot V(t_0) \cdot \sum_{i_t=0}^{i_T-1} P_a^{Life}(i_t) \cdot (1-\lambda)^{i_t}$$

Engagement de l'assureur

Le montant de la prestation à l'échéance, lié à cette garantie, peut s'exprimer par $\left(\kappa \cdot V(t_0) - V(T)\right)^+$, c'est à dire comme la partie positive de l'écart entre le pourcentage (noté κ) du portefeuille initial qui est garanti par le contrat et $V(T)$, la valeur épargnée sur le compte individuel de l'assuré à la date T d'échéance du contrat.

En intégrant le taux de chargement, i.e., $V(T) = (1-\lambda)^T \cdot X(T)$, la prestation versée est donc $\left(\kappa \cdot V(t_0) - (1-\lambda)^T \cdot X(T)\right)^+$ ou encore

$$\boldsymbol{(1-\lambda)^T \left(\frac{\kappa}{(1-\lambda)^T} V(t_0) - X(T) \right)^+}$$

La Valeur Actuelle Probable (Best Estimate) de l'engagement de l'assureur jusqu'à l'échéance T est :

$$BE_{Assureur}(t_0 \to T) = P_a^{Life}(T) \cdot \mathbb{E}\left[e^{-\int_{t_0}^{T} r(u)du} (1-\lambda)^T \left(\frac{\kappa}{(1-\lambda)^T} V(t_0) - X(T) \right)^+ \right].$$

La garantie peut être exercée si l'assuré a survécu jusqu'en T ou s'il n'a pas racheté son contrat. La probabilité de cet événement s'écrit : $P_a^{Life}(T) = {}_TP_a \cdot \prod_{i=1}^{T-1}(1-\tau_i)$,

où ${}_TP_a$ désigne la probabilité de survie jusqu'à l'échéance T d'un individu d'âge *a* en *t_0*. Ainsi, on a donc :

$$BE_{Assureur}(t_0 \to T) = P_a^{Life}(T) \cdot (1-\lambda)^T \cdot Put(t,T,F,K,DF).$$

Avec un strike $K = \frac{\kappa}{(1-\lambda)^T} V(t_0)$,

$$Put(t,T,F,K,DF) = \mathbb{E}\left[DF \left(K - Fe^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)+\sigma W_{T-t}} \right)^+ \right]$$

F le valeur forward du portefeuille X entre t_0 et l'échéance T

et DF le discount factor entre t_0 et T.

Expression de la tarification

i. *Equation à satisfaire*

La prime pure est obtenue en égalisant les engagements de l'assuré et de l'assureur à la souscription.

$$BE_{Assuré}(t_0 \to T) = BE_{Assureur}(t_0 \to T)$$

Soit,

$$\lambda \cdot V(t_0) \cdot \sum_{i_t=0}^{i_T-1} P_a^{Life}(i_t) \cdot (1-\lambda)^{i_t} = P_a^{Life}(T) \cdot (1-\lambda)^T \cdot Put(t,T,F,K,DF).$$

Pour simplifier et à défaut d'avoir des tables décès selon la durée du contrat et la proximité à la maturité, il est pertinent de remarquer que pour chaque police, on a $\boldsymbol{P_a^{Life}(i_t) > P_a^{Life}(T)}$ donc du point de vue de l'assureur, rechercher $\boldsymbol{\lambda}$ tel que :

$$\boldsymbol{\lambda \cdot V(t_0) \cdot \sum_{i_t=0}^{i_T-1} (1-\lambda)^{i_t} = (1-\lambda)^T \cdot Put(t,T,F,K,DF)}$$

est conservateur car il assure $BE_{Assuré} > BE_{Assureur}$

Nous obtenons alors :

$$\lambda \cdot V(t_0) \cdot \sum_{i_t=0}^{i_T-1} (1-\lambda)^{i_t} = (1-\lambda)^T \cdot Put(t,T,F,K,DF)$$

$$\lambda \cdot V(t_0) \cdot \frac{1-(1-\lambda)^{i_T}}{1-(1-\lambda)} = (1-\lambda)^T \cdot Put(t,T,F,K,DF)$$

En considérant $i_T = T$

$$V(t_0) \cdot [1-(1-\lambda)^T] = (1-\lambda)^T \cdot Put(t,T,F,K,DF)$$

$$1 = (1-\lambda)^T \cdot \left[\frac{Put(t,T,F,K,DF)}{V(t_0)} + 1\right]$$

Rappelons que K dépend de λ de la façon suivante $K(\lambda) = \frac{\kappa}{(1-\lambda)^T} V(t_0)$

$$\frac{1}{(1-\lambda)^T} - 1 = \frac{Put\left(t,T,F,\frac{\kappa}{(1-\lambda)^T}V(t_0),DF\right)}{V(t_0)}$$

Pour simplifier les écritures, opérons le changement de variable

$$x = \frac{1}{(1-\lambda)^T} \; soit \; \lambda = 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{1/T}$$

$$x \in [1;+\infty[\; et \; \lambda \in [0;1[$$

L'équation devient alors :

$$x - 1 = Put(t,T,F',x.\kappa,DF) \quad (1)$$

Avec $F' = F/V(t_0)$

ii. Existence et unicité d'une solution :

Posons : $f(x) = x - 1 - Put(t,T,F',x.\kappa,DF)$

$$f'(x) = 1 - \kappa \cdot \frac{\partial Put}{\partial K}(t,T,F',x.\kappa,DF)$$

Soit

$$f'(x) = 1 - \kappa \cdot DF.N(d1(x))$$

Car $\frac{\partial Put}{\partial K} = DF.N(d1(x))$, avec $d_1 = \frac{\log(x.\kappa/F\prime)+\frac{1}{2}\Sigma^2(t,T)}{\Sigma(t,T)}$ dont nous expliciterons plus loin les notations

Ce qui se démontre en écrivant :

$$Put(t,T,F,K,DF) = DF.\mathbb{E}\left[\left(K - Fe^{-\frac{1}{2}\Sigma^2(t,T)+\Sigma(t,T)W}\right)^+\right]$$

et $\frac{\partial Put(t,T,F,K,DF)}{\partial K} = DF.\mathbb{E}[1_{K>Fe^{-\frac{1}{2}\Sigma^2(t,T)+\Sigma(t,T)W}}] = DF.N(d1(x))$.

Notons que, asymptotiquement $quand\ x \to +\infty$:

$$Put(t,T,F',x.\kappa,DF) \sim (x.\kappa - F').DF \sim x.\kappa.DF$$

Soit :

$$f(x) \sim x.(1 - \kappa.DF) \quad quand\ x \to +\infty$$

Comme $f(0) = -1 < 0$, nous pouvons établir que si $\boldsymbol{\kappa < \frac{1}{DF}}$. (A)

alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) > 0$,

Ce qui permet de conclure que l'équation (1) admet une solution si la condition (A) est vérifiée.

La condition (A) assure également $f'(x) > 0$ car $N(d1) \in]0;1[$.

La condition (A) assure donc l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation (1). Si cette condition n'est pas vérifiée, on ne peut pas conclure quant à l'existence ni l'unicité d'une solution.

N.B:

Economiquement :

- La fonction f correspond à la valorisation de la garantie pour l'assureur (f positive signifie, un gain, f négative signifie un coût)
- la condition (A) nous « contraint » à proposer un niveau maximal de garantie qui ne dépasse pas la capitalisation du taux sans risque sur la période de la garantie. La contrainte paraissant acceptable, nous nous placerons désormais dans le cas de la condition (A) et ne creuserons pas davantage l'existence de solution en dehors de (A).

ii. Recherche de solution & solution approchée :

A défaut de formule analytique existante, nous pouvons obtenir une solution de (1) par dichotomie ou plus rapidement par la méthode de Newton, initialisée par une solution approchée.

Nous pouvons obtenir une estimation de x , x_{prox} , en effectuant un développement limité de f au premier ordre en x au voisinage de 1 (ou lambda proche de 0) :

$$f(x) = x - 1 - Put(t, T, F', x.\kappa, DF)$$

Or :

$$Put(t, T, F', K(x), DF)$$

$$\cong Put(t, T, F', K(1), DF) + \frac{\partial K(x=1)}{\partial x} \cdot \frac{\partial Put(t, T, F', K(x=1), DF)}{\partial K}(x-1)$$

$$Put(t, T, F', K(x), DF) \cong Put(t, T, F', \kappa, DF) + \kappa \cdot \frac{\partial Put(t, T, F', \kappa, DF)}{\partial K}(x-1)$$

D'où :

$$f(x) \cong x - 1 - Put(t, T, F', \kappa, DF) - \kappa \cdot \frac{\partial Put(t, T, F', \kappa, DF)}{\partial K}(x-1)$$

$$x_{prox} = 1 + \frac{Put(t, T, F', \kappa, DF)}{1 - \kappa \cdot \frac{\partial Put(t, T, F', \kappa, DF)}{\partial K}}$$

N.B: Rappelons qu'une fois la solution obtenue, nous obtenons ensuite

$$\lambda_{solution} = 1 - \left(\frac{1}{x_{solution}}\right)^{\left(\frac{1}{T}\right)}$$

IV. MODELISATION DES ACTIFS

Nous allons voir que dans le cadre du modèle de Black-Scholes, nous pouvons obtenir une formule de pricing d'un Put même avec un portefeuille n'ayant pas une allocation constante, mais une allocation évolutive dans le temps.

La modélisation retenue est le modèle de Black-Scholes multi-dimensionnel qui repose sur un certain nombre de conditions :

- **l'absence d'opportunités d'arbitrage**
- **l'absence de coûts de transactions,**
- **l'existence d'un taux d'intérêt sans risque déterministe,**

Ce modèle reste une référence même s'il s'écarte de la réalité des marchés en supposant une volatilité constante et en sous-estimant la probabilité de variations extrêmes (krachs).

Il reste, toutefois, parfaitement pertinent s'il est bien calibré sur des prix d'options observés sur le marché (volatilité implicite).

Notons X_t la valeur du portefeuille investi sur deux actifs, l'Unité de Compte (dont la valeur est notée S_t^1) et le Fonds en Euros (dont la valeur est notée S_t^2).

En supposant une diffusion de type Black-Scholes sous la probabilité « historique».

$\frac{dS_t^1}{S_t^1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^1$ et $\frac{dS_t^2}{S_t^2} = \mu_2 dt + \sigma_2 dW_t^2$ avec dW_t^1 et dW_t^2 des accroissements browniens corrélés avec le coefficient ρ .

En supposant un rebalancement continu du portefeuille de valeur X_t selon des poids $\omega_1(t)$ pour S_t^1 et poids $\omega_2(t)$ pour S_t^2 (avec $\omega_2(t) = 1 - \omega_1(t)$) nous pouvons écrire l'équation d'autofinancement en termes de proportion : $\frac{dX_t}{X_t} = \omega_1(t)\frac{dS_t^1}{S_t^1} + \omega_2(t)\frac{dS_t^2}{S_t^2}$

Nous obtenons $\boldsymbol{\frac{dX_t}{X_t} = (\omega_1(t)\mu_1 + \omega_2(t)\mu_2)dt + (\omega_1(t)\sigma_1)dW_t^1 + (\omega_2(t)\sigma_2)dW_t^2}$

Ainsi V_t peut s'écrire sous la forme d'un processus Black-Scholes $\frac{dX_t}{X_t} = \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t$ avec :

$$\boldsymbol{\mu(t) = (\omega_1(t)\mu_1 + \omega_2(t)\mu_2)}$$

et $\boldsymbol{(\sigma(t))^2 = (\omega_1(t)\sigma_1)^2 + (\omega_2(t)\sigma_2)^2 + 2\rho(\omega_1(t)\sigma_1\omega_2(t)\sigma_2)}$

N.B : Si nous cherchions à sommer S_t^1 et S_t^2, le processus résultant ne serait pas un processus Log-normal et nous serions dans le cadre d'une approximation. Ici, l'hypothèse forte est le rebalancement en continue sur les poids cibles, ce qui n'est pas respecté en pratique, le rebalancement étant généralement mensuel.

Nous explicitons, ci-dessous, la formule de Black et Scholes pour un put européen remboursant $\max(K - X(T); 0) = \big(K - X(T)\big)^+$ à l'échéance et dont les coefficients de rendement $\mu(t)$ et volatilité $\sigma(t)$ dépendent du temps :

$$Put_Price(t, T, F, K, D) = DF(t, T) \cdot [K \cdot N(d_1) - F \cdot N(d_0)]$$

où N est la fonction de répartition de la loi normale, centrée réduite et en posant $d_0 = \frac{\log(K/F) - \frac{1}{2}\Sigma^2(t,T)}{\Sigma(t,T)}$, $d_1 = \frac{\log(K/F) + \frac{1}{2}\Sigma^2(t,T)}{\Sigma(t,T)}$, $DF(t,T) = e^{-\int_t^T r(u)du}$ le discount factor entre t et T, $F(t,T) = X_t e^{\int_t^T \mu(u)du}$ le niveau forward de la valeur du portefeuille et $\Sigma^2(t,T) = \int_t^T \sigma^2(u)du$ le cumul de sa volatilité au carrée.

Dans notre contexte de fonds à horizon avec des poids $\omega_i(t)$ dépendant du temps (fonction constante par morceaux), nous obtenons :

$$\boldsymbol{F(t,T) = X_t e^{\int_t^T (\omega_1(t)\mu_1 + \omega_2(t)\mu_2)du}}$$

Et

$$\boldsymbol{\Sigma^2(t,T) = \int_t^T (\omega_1(u)\sigma_1)^2 + (\omega_2(u)\sigma_2)^2 + 2\rho(\omega_1(u)\sigma_1\omega_2(u)\sigma_2)du}$$

En évaluant $\frac{\partial Put_Price(t,T,F,K,D)}{\partial K} = DF(t,T) \cdot N(d_1)$, nous pouvons calculer analytiquement la valeur approchée de la solution à l'équation (1) :

$$\boldsymbol{x_{prox} = 1 + \frac{Put(t,T,F',\kappa,DF)}{1 - \kappa \cdot \frac{\partial Put(t,T,F',\kappa,DF)}{\partial K}} = 1 + \frac{DF(t,T) \cdot [\kappa \cdot N(d_1) - F' \cdot N(d_0)]}{1 - \kappa \cdot DF(t,T) \cdot N(d_1)}}$$

V. ILLUSTRATION DANS LE CADRE D'UNE GESTION À HORIZON

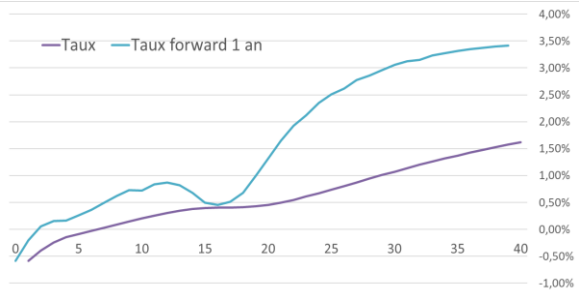
Afin d'illustrer les résultats de cette étude, nous avons développé un outil de modélisation du produit qui s'appuie sur plusieurs types d'hypothèses :

- Les hypothèses décrivant les caractéristiques du produit : niveau de la garantie, horizon de la retraite.
- Les hypothèses financières : la tendance et la volatilité de la poche UC, la tendance et la volatilité du fonds Euro, la corrélation entre ces deux supports, la courbe des taux sans risque
- Les hypothèses comportementales (taux de rachat et mortalité) seront négligées

Considérons une gestion à horizon sur une période de 40 ans formalisée par une allocation rebalancée régulièrement avec pondérations constantes sur une période d'un an.

Nous supposons que la protection ou garantie est donnée avant application des frais de gestion du contrat (ce qui permet de supposer un drift du fonds en € = 1.5%), mais après les frais de la garantie.

Considérons la courbe de taux (swap) entre 0 et 40 ans au 31/12/2021.

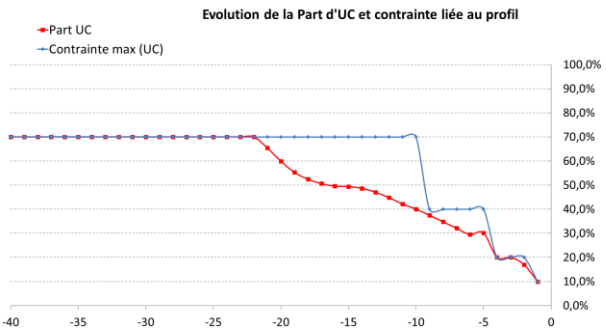


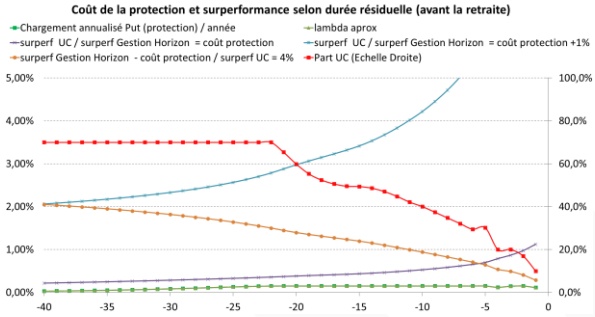
Nous proposons de retenir les hypothèses centrales suivantes pour la modélisation des actifs.

Correlation (ρ)	**20%**
Vol_F_Euro (σ_2)	1%
Vol_UC (σ_1)	15%
Drift_F_Euro (μ_2)	1.5%
Drift_UC (μ_1)	-0.5%

Comme décrit dans le **Tableau 1** la contrainte liée au profil impose une réduction progressive des risques financiers.

PROFIL PRUDENT	
Niveau garanti	99.0%
Coût annuel maximal	0.15%



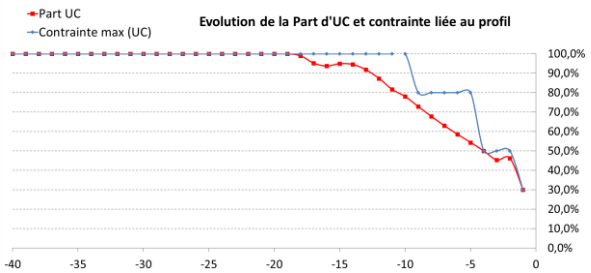


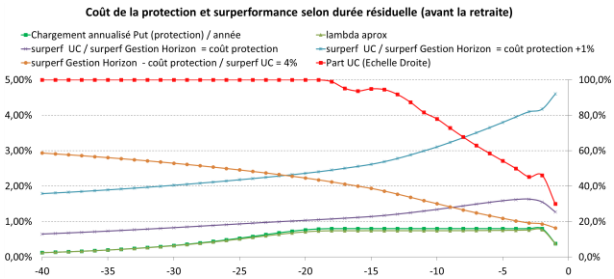
Le profil prudent est compatible avec une protection à 99% et un coût de garantie plafonné à 0,15% par an. La part UC commencerait à s'éloigner du plafond de 70% à 21 ans de l'échéance pour décroitre régulièrement jusqu'à 10% d'UC et 90% de fonds en € la dernière année.

V. ILLUSTRATION DANS LE CADRE D'UNE GESTION À HORIZON

Il suffit d'un supplément de 1,5% de l'UC par rapport au fonds en € pour compenser le coût de cette protection. Ce niveau est nécessaire pour un horizon court de 1 an, mais avec un horizon plus long, 20 ans par exemple, 0,4% suffirait. D'ailleurs, sur cet horizon, si le moteur UC fait plus de 4% de surperformance par an, la structure protégée réalisera plus de 1,3% de surperformance par an.

PROFIL EQUILIBRE	
Niveau garanti	96.0%
Coût annuel maximal	0.80%

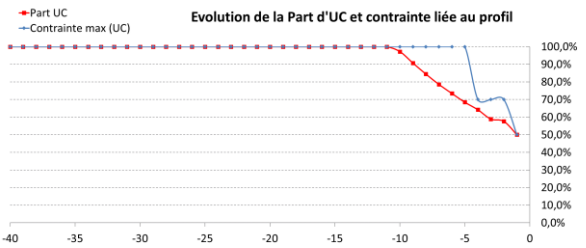


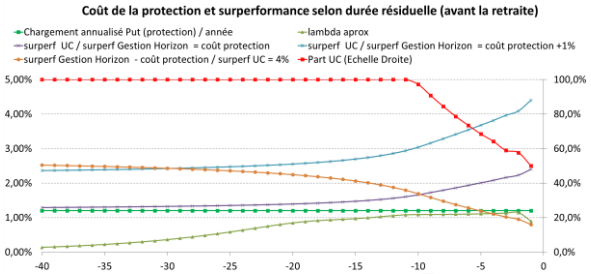


Pour un profil équilibre avec une protection à 96% et un coût de garantie plafonné à 0,8% par an, la part UC commencerait à s'éloigner des 100% à 18 ans de l'échéance pour décroitre régulièrement jusqu'à 30% d'UC et 70% de fonds en € la dernière année. Il suffit d'un supplément de 1,6% de l'UC par rapport au fonds en € pour compenser le coût de cette protection.

Ce niveau de 1,6% est nécessaire pour un horizon de 3 ou 4 ans, mais avec un horizon plus long, 20 ans par exemple, 1% suffirait. En particulier, sur cet horizon, si le moteur UC fait plus de 4% de surperformance par an, la structure protégée réalisera plus de 2,23% de surperformance par an.

PROFIL DYNAMIQUE	
Niveau garanti	94.0%
Coût annuel maximal	1.20%





Pour un profil dynamique avec une protection à 94% et un coût de garantie plafonné à 1,2% par an, la part UC commencerait à s'éloigner des 100% à 10 ans de l'échéance pour décroitre régulièrement jusqu'à 50% d'UC et 50% de fonds en € la dernière année. Il suffit d'un supplément de 2% de l'UC par rapport au fonds en € pour compenser le coût de cette protection. Ce niveau de 2% est nécessaire pour un horizon de 3 ans, mais avec un horizon plus long, 20 ans par exemple, 1,3% suffirait. En particulier, sur cet horizon, si le moteur UC fait plus de 4% de surperformance par an, la structure protégée réalisera une surperformance de plus de 2,25% par an.

CONCLUSION

Cette étude propose une solution d'investissement s'inscrivant dans le cadre d'un des 3 profils d'investissement du PERin contraint par une réduction progressive des risques jusqu'à l'horizon de la retraite. L'allocation proposée associe un fonds en € et un moteur de performance matérialisé par une unité de compte (ou un panier de plusieurs UC).

Ce moteur de performance est destiné à apporter le surcroit de performance par rapport à une allocation à 100% en fonds en €. Pour représenter une alternative comparable au fonds en euro, il est important de contrôler le risque de l'investissement en se rapprochant du risque du fonds en €. Pour cela, une protection du capital s'impose à l'horizon de la retraite. L'étude permet de tarifier le coût de cette protection en fonction du profil d'investissement et des paramètres (courbe de taux, niveau garanti, volatilités, tendances et corrélations des actifs).

Ce coût est, ensuite, traduit en équivalent de surperformance nécessaire pour l'UC afin de compenser l'impact de ce coût sur la performance. Cette solution d'investissement est une réelle alternative au fonds en euro puisqu'une surperformance de l'UC (avec une dominante en actions) de l'ordre de 1% (environ 0,4% pour le profil prudent, 1% pour le profil équilibre et 1,3% pour le profil dynamique sur les 20 années) suffit pour battre le fonds en €.

En outre, sur cet horizon de 20 ans, si le moteur UC fait une surperformance de 4% par an, la structure protégée réalisera une surperformance de plus de 1% (environ 1,3% pour le profil prudent, 2,23% pour le profil équilibre et 2,25% par an. pour le profil dynamique) net des coûts de protection.

Nexialog Consulting

STRATÉGIE | ACTUARIAT | GESTION DES RISQUES

Nexialog Consulting est un cabinet de conseil spécialisé en Stratégie, Actuariat et Gestion des risques qui dessert aujourd'hui les plus grands acteurs de la banque et de l'assurance. Nous aidons nos clients à améliorer de manière significative et durable leurs performances et à atteindre leurs objectifs les plus importants.

Les besoins de nos clients et les réglementations européennes et mondiales étant en perpétuelle évolution, nous recherchons continuellement de nouvelles et meilleures façons de les servir. Pour ce faire, nous recrutons nos consultants dans les meilleures écoles d'ingénieur et de commerce et nous investissons des ressources de notre entreprise chaque année dans la recherche, l'apprentissage et le renforcement des compétences.

Quel que soit le défi à relever, nous nous attachons à fournir des résultats pratiques et durables et à donner à nos clients les moyens de se développer.

CONTACTS

Christelle BONDOUX
Associée, Directrice commerciale
+ 33 (0)1 44 73 75 67
cbondoux@nexialog.com

www.nexialog.com

Retrouvez toutes nos publications sur Nexialog R&D

Eric BAESEN
Senior Manager, Global Markets
+33 (0)7 70 34 64 62
ebaesen@nexialog.com

Areski COUSIN
Expert Scientifique
acousin-ext@nexialog.com

Paul-Antoine DELETOILLE
Responsable de Compte Banque et AM
+33 (0)1 44 73 75 70
padeletoille@nexialog.com

Adrien MISKO
Manager R&D
+ 33 (0) 6 69 27 62 26
amisko@nexialog.com