

Gestion des facteurs de risque non modélisables (NMRF) via machine learning

Nexialog Consulting, Paris, France

Scalnyx, Paris, France

13 mars 2022



Résumé

La revue fondamentale du trading book (FRTB) élaborée par le comité de Bâle (Basel Committee on Banking Supervision) impose une série d'exigences dont l'entrée en vigueur aura lieu en janvier 2022. L'une des innovations principales définies par FRTB concerne l'introduction du concept des facteurs de risque non modélisables (NMRF), ce qui nécessite la détention de fonds propres supplémentaires. Les institutions financières cherchent à réduire ces capitaux afin d'augmenter leur rentabilité.

Cet article vise à présenter une méthode de gestion des facteurs de risque non modélisables via machine learning et de comparer les résultats obtenus avec la méthode de place.

Mots-clés : Revue fondamentale du trading book (FRTB), Facteur de risque, Facteur de risque non modélisable (NMRF), Risque de marché, Charge en capital, Stress tests, Expected shortfall, Machine learning.

Table des matières

1	Introduction	5
2	La charge en capital liée aux facteurs de risques modélisables	6
3	La charge en capital liée aux facteurs de risque non modélisables	7
3.1	La méthode directe	7
3.2	La méthode en étapes	8
3.2.1	Estimation des chocs calibrés :	8
3.2.2	Détermination du CSSRFR (calibrated stress scenario risk factor range) : .	10
3.2.3	Détermination du scénario extrême de choc futur :	10
3.2.4	La mesure de risque du scénario de stress :	10
3.3	Agrégation des mesures de risque du scénario de stress :	11
4	Implémentation de la méthode de place	12
4.1	Cadre de l'étude	12
4.2	Résultats	13
5	Gestion des facteurs de risque non modélisables	17
5.1	Description de la méthodologie	17
5.2	Modélisation des prix des swaptions	17
5.3	Description du modèle	17
5.3.1	Mesures d'erreurs	18
5.3.2	Régression LASSO	18
5.4	Comparaison des performances	20
5.5	Calcul des nouvelles charges en capital	23
6	Conclusion	26
	Références	27
7	Annexes	28
7.1	Annexe A : Les différentes catégories de facteurs de risque	28
7.2	Annexe B :	28
7.3	Annexe C : Arbre de régression	28
7.4	Annexe D : Forêt aléatoire	29
7.5	Annexe E : XGBoost	30
	Contacts	32

Abréviations

CRR	Capital Requirement Regulation
CSSRFR	Calibrated Stress Scenario Risk Factor Range
EBA	European Banking Authority
ES	Expected Shortfall
FRTB	Fundamental Review of the Trading Book
MRF	Modellable Risk Factor
NMRF	Non Modellable Risk Factor
RFET	Risk Factor Eligibility Test
SSRM	Stress Scenario Risk Measure

Notations

D^*	Date de référence
j	Identificateur du facteur de risque non modélisable
$D_1 < \dots < D_M$	Dates auxquelles les valeurs du facteur de risque non modélisable sont enregistrées
$D_{t+1} - D_t$	Nombre de jours ouvrables entre D_t et D_{t+1}
$r_j(D)$	Valeur du facteur de risque non modélisable j à la date D
r_j^*	Valeur du facteur de risque non modélisable j à la date de référence D^* , $r_j^* \equiv r_j(D^*)$
$LH(j)$	Horizon de liquidité du facteur de risque non modélisable j
$Ret(j, t, 10)$	Rendement du facteur de risque non modélisable j entre D_t et $D_t + 10$ jours ouvrables (ou l'approximation la plus proche)
$CS(j)$	Choc calibré pour le facteur de risque non modélisable j
$FS_{D^*}(j)$	Scénario extrême de choc futur pour le facteur de risque non modélisable j à la date D^*
$loss_{D^*}^j(r)$	Perte du portefeuille à la date D^* lorsque le facteur de risque non modélisable j prend une valeur r
$SS_{D^*}^j$	Mesure de risque du scénario de stress à la date D^* pour le facteur de risque non modélisable j

1 Introduction

La revue fondamentale du trading book (FRTB) fait partie des initiatives prises pour renforcer le système financier après avoir constaté que les précédentes propositions de réglementation bancaire n'avaient pas permis d'éviter la crise financière de 2008. Son objectif est de corriger les lacunes identifiées dans le cadre existant de Bâle 2.5 en imposant une série d'exigences dont l'entrée en vigueur aura lieu en janvier 2022. On peut résumer les principales exigences de FRTB par : une définition plus stricte de la frontière entre Trading et Banking Book, le remplacement de la Value at Risk par l'Expected Shortfall, une meilleure prise en compte du risque de liquidité au niveau du Trading Book, une révision du modèle interne (Internal Model Approach ou IMA) et de l'approche standard (Standardized Approach ou SA) pour limiter les écarts d'exigences en capital entre les deux modèles. FRTB introduit également le cadre des facteurs de risque non modélisables. Ainsi, elle sépare les facteurs de risque en deux catégories : les facteurs modélisables et les facteurs non modélisables (NMRF : non modellable risk factors). Le fait d'introduire les facteurs de risque non modélisables permet d'atténuer la possibilité que les modèles internes sous-estiment le risque de marché sur les marchés illiquides.

FRTB précise qu'un facteur de risque est modélisable s'il répond à l'un des critères suivants :

- La banque doit identifier pour le facteur de risque au moins 24 observations de prix réels par an, et sur les 12 mois précédents, il ne doit pas y avoir de période de 90 jours pendant laquelle moins de quatre observations de prix réels sont identifiées pour le facteur de risque OU
- La banque doit identifier pour le facteur de risque au moins 100 observations de prix « réels » sur les 12 mois précédents.

Si aucun des deux critères n'est satisfait, on dit que le facteur de risque est non modélisable.

C'est ce qu'on appelle le test RFET : Risk Factor Eligibility Test.

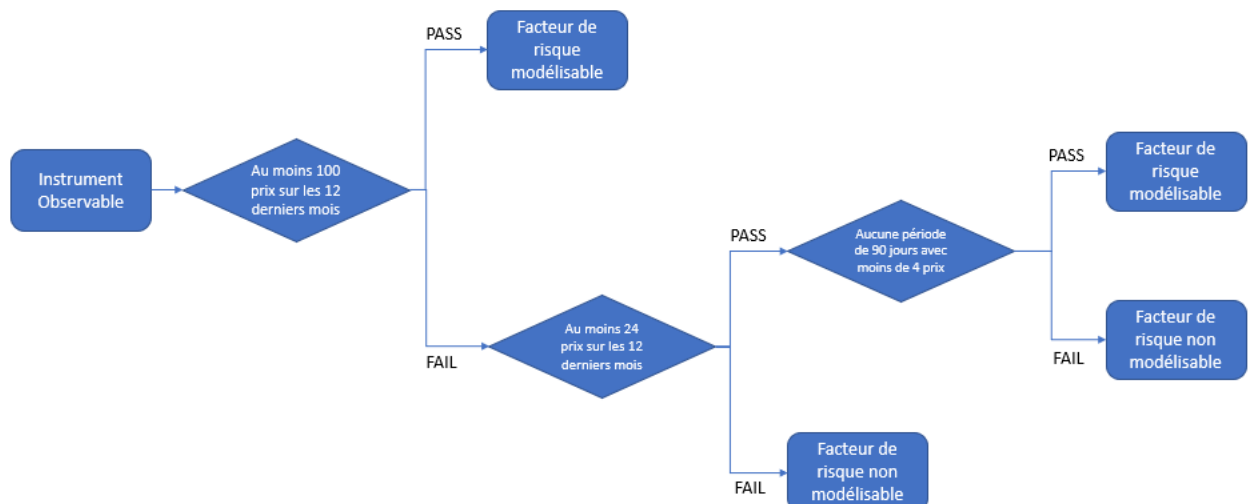


Figure 1 Aperçu du test RFET

Les normes de FRTB précisent que dans le cadre du modèle interne, lorsqu'un facteur de risque a été identifié comme non modélisable, il doit être capitalisé en dehors de la mesure de l'expected shortfall, sous une mesure de risque de scénario de stress (SSRM : stress scenario risk measure). Cela implique une augmentation considérable des exigences en matière de capital pour ce dernier.

Pour réduire les capitaux liés aux NMRF, nous allons considérer une méthode de gestion de ces facteurs non modélisables via machine learning. Le but est d'estimer le facteur de risque non modélisable en s'appuyant sur les facteurs de risque modélisables.

D'un point de vue réglementaire, on peut se référer au document [Aut20b] publié par l'EBA et intitulé «Final report on guidelines on criteria for the use of data inputs in the risk-measurement model» qui spécifie entre autres les conditions à respecter lors de l'utilisation de techniques d'interpolation et d'extrapolation pour remplacer les valeurs manquantes ou incohérentes dans les entrées de données des facteurs de risque. Ainsi, en se basant sur [Aut20b] : lorsque des données provenant d'autres facteurs de risque sont utilisées pour remplacer les valeurs manquantes d'un facteur de risque donné, ces données doivent remplir les conditions ci-dessous :

- Les facteurs de risque utilisés doivent être classés modélisables et doivent être les plus proches du facteur de risque donné.
- Il faut utiliser au moins deux facteurs de risque modélisables.
- Les facteurs de risque utilisés ne doivent pas être obtenus par extrapolation eux-mêmes.

Afin d'illustrer notre approche, nous avons travaillé avec des swaptions à la monnaie de différentes maturités et différents tenors.

2 La charge en capital liée aux facteurs de risques modélisables

Pour le calcul de la charge en capital, FRTB précise que l'expected shortfall doit être utilisé avec un niveau de confiance de 97.5 % ([Aut20a],[Int19]). Elle propose également 5 groupes de facteurs de risque, chaque groupe ayant son propre horizon de liquidité (voir Annexe A). L'horizon de liquidité indique le temps nécessaire à l'exécution d'une transaction dans des conditions de marché stressées sans que le prix de l'instrument de couverture soit affecté.

j	LH_j
1	10
2	20
3	40
4	60
5	120

Figure 2 Les différents horizons de liquidité des facteurs de risque

En se basant sur ce tableau des horizons de liquidité, le calcul de l'expected shortfall se fait à travers la formule suivante :

$$ES = \sqrt{(ES_T(P))^2 + \sum_{j \geq 2} \left(ES_T(P, j) \sqrt{\frac{LH_j - LH_{j-1}}{T}} \right)^2} \quad (1)$$

Où :

- T est fixé à 10 jours comme horizon de base.

- $ES_T(P)$ est l'expected shortfall d'un portefeuille P à l'horizon de base T (c'est-à-dire 10 jours) qui est calculé en choquant tous les facteurs de risque de chaque position.

- $ES_T(P, j)$ est l'expected shortfall d'un portefeuille P à l'horizon de base T (c'est-à-dire 10 jours) en choquant uniquement les facteurs de risque de chaque position dont l'horizon de liquidité est j (selon le tableau ci-dessus) et en gardant les autres facteurs de risque constants.

3 La charge en capital liée aux facteurs de risque non modélisables

Dans le cadre du modèle interne, la détermination de la charge en capital liée aux facteurs de risque non modélisables (pour lesquels les données de marché observables sont limitées) repose sur la détermination de la mesure de risque de scénario de stress. Pour cela, l'EBA propose deux méthodes : la méthode directe (the direct method) et la méthode en étapes (the stepwise method).

Pour les deux méthodes, les institutions doivent commencer par déterminer la série de rendements sur 10 jours ouvrables à partir de la série temporelle d'observations :

$$\text{Ret}(r_j, t, 10) = (r_j(D_{t_{10}}) - r_j(D_t)) \times \sqrt{\frac{10 \text{ jours ouvrables}}{D_{t_{10}} - D_t}} \quad (2)$$

Où :

$D_{t_{10}}$ est la date s'éloignant de moins de 10 jours de D_t . On pourra se référer à l'annexe B pour la formule mathématique.

Et :

$\{D_1, \dots, D_M, D_{M+1}, \dots, D_{M+d}\}$ représente le vecteur des dates d'observations dans la période d'un an P prolongée d'un maximum de 20 jours ouvrables.

Ainsi, les institutions obtiennent les rendements de séries temporelles de $\text{Ret}(r_j, t, 10)$ pour tout $t \in \{1, \dots, N\}$ où $N = M-1$ est le nombre de rendements dans la série temporelle.

3.1 La méthode directe

La méthode directe exige que le scénario extrême du choc futur soit déterminé en calculant directement l'expected shortfall des pires pertes, cette méthode n'est utilisée que si $N \geq 200$. La mesure de risque du scénario de stress sur un horizon de 10 jours pour le NMRF j à la date D^* est la suivante :

$$SS_{10 \text{ days}, D^*}^{\text{direct}, j} = \widehat{\text{ES}}_{\text{Right}} [\text{loss}_{D^*}(r_j(D^*) + \text{Ret}(r_j, t, 10)), \alpha] \quad (3)$$

Où $\text{loss}_{D^*}(r_j) = PV(\vec{r}^*) - PV(r_j, \vec{r}_{i \neq j}^*)$ est la fonction de perte du portefeuille qui mesure les variations de la valeur du portefeuille à la date de référence lorsqu'un facteur de risque change, $PV(\vec{r}^*)$ désignant la valeur actuelle du portefeuille en fonction de tous les facteurs de risque $\vec{r} = \{r_i\}$ (modélisables et non modélisables), et

$$\widehat{\text{ES}}_{\text{Left}}(X, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-1}{\alpha N} \times \left\{ \sum_{i=1}^{[\alpha N]} X_{(i)} + (\alpha N - [\alpha N]) X_{([\alpha N]+1)} \right\} \quad (4)$$

$$\widehat{\text{ES}}_{\text{Right}}(X, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\text{ES}}_{\text{Left}}(-X, \alpha)$$

Avec :

$-\alpha = 2.5\%$.

$-X_{(i)}$ représente la i ème petite observation de la série temporelle X de taille N .

$-\lfloor \alpha N \rfloor$ indique la partie entière du produit αN .

Finalement, la mesure du risque de scénario de stress pour le NMRF j à la date D^* est :

$$SS_{D^*}^j = \sqrt{\frac{LH_{adj}(j)}{10}} \times SS_{10days, D^*}^{direct, j} \times UCF \quad (5)$$

Où :

$- LH_{adj}(j) = \max(20, LH(j))$, $LH(j)$ étant l'horizon de liquidité du facteur de risque j .

$- UCF = \left(0.95 + \frac{1}{\sqrt{(N-1.5)}} \right)$, c'est le facteur de compensation de l'incertitude (the uncertainty compensation factor) qui permet de capturer entre autres l'incertitude due à la faible observabilité des facteurs de risque non modélisables.

3.2 La méthode en étapes

Comme son nom l'indique, la méthode en étapes exige que les institutions déterminent le scénario de choc futur par étapes. En utilisant cette méthode, les institutions doivent approximer l'expected shortfall des pertes en calculant dans un premier temps un choc calibré à une mesure d'expected shortfall sur les rendements observés pour ce facteur de risque, puis en calculant la perte correspondant au mouvement du facteur de risque identifié par ce choc calibré.

3.2.1 Estimation des chocs calibrés :

Après avoir déterminé la série de rendements sur 10 jours ouvrables à partir de la série temporelle d'observations comme décrit ci-dessus, les institutions doivent estimer les chocs calibrés, pour cela, plusieurs méthodologies existent :

- **Méthode 1** : La méthode historique
- **Méthode 2** : La méthode sigma / méthode asigma
- **Méthode 3** : La méthode fallback

La **Méthode 1** doit être utilisée quand le nombre de rendements $N \geq 200$, la **Méthode 2** doit être utilisée quand $12 \leq N < 200$. Finalement, la **Méthode 3** est utilisée quand $N < 12$.

- Dans la **méthode historique**, les deux chocs sont calculés en utilisant les deux formules suivantes :

$$\begin{aligned} CS_{down}(r_j) &= \widehat{ES}_{Left}(Ret(j), \alpha) \times \left(0.95 + \frac{1}{\sqrt{(N-1.5)}} \right) \\ CS_{up}(r_j) &= \widehat{ES}_{Right}(Ret(j), \alpha) \times \left(0.95 + \frac{1}{\sqrt{(N-1.5)}} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Où $\widehat{ES}_{Left}(X, \alpha)$, $\widehat{ES}_{Right}(X, \alpha)$ sont définies ci-dessus.

- **La méthode sigma** consiste dans un premier temps à estimer l'écart-type grâce à la formule suivante :

$$\hat{\sigma}_{Ret(j)} = \sqrt{\frac{1}{N-1.5} \times \sum_{t=1}^N \left(Ret(r_j, t, 10) - \overline{Ret}(r_j, , 10) \right)^2} \quad (7)$$

Puis à calculer les chocs calibrés :

$$\begin{aligned} CS_{down}^{sigma}(r_j) &= C_{ES \text{ equiv, down}} \times \hat{\sigma}_{Ret(j)} \times \left(1 + \frac{\Phi^{-1}(CL_{sigma})}{\sqrt{2(N-1.5)}} \right) \\ CS_{up}^{sigma}(r_j) &= C_{ES \text{ equiv, up}} \times \hat{\sigma}_{Ret(j)} \times \left(1 + \frac{\Phi^{-1}(CL_{sigma})}{\sqrt{2(N-1.5)}} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Où $C_{ES \text{ equiv, down}} = C_{ES \text{ equiv, up}} = 3$ et $CL_{sigma} = 90\%$.

- Dans **la méthode asigma**, les institutions doivent d'abord diviser les rendements $Ret(r_j, 1, 10), \dots, Ret(r_j, N, 10)$ au niveau de la médiane m , puis déterminer la moyenne sur l'ensemble des N_{up} rendements supérieurs à la médiane $\hat{\mu}_{Ret \leq m}^{Ret(j)}$ et la moyenne sur l'ensemble des N_{down} rendements inférieurs à la médiane $\hat{\mu}_{Ret > m}^{Ret(j)}$, soit :

$$\hat{\mu}_{Ret \leq m}^{Ret(j)} = \frac{1}{N_{down}} \times \sum_{\substack{t=1 \\ Ret(r_j, t, 10) \leq m}}^N Ret(r_j, t, 10); \hat{\mu}_{Ret > m}^{Ret(j)} = \frac{1}{N_{up}} \times \sum_{\substack{t=1 \\ Ret(r_j, t, 10) > m}}^N Ret(r_j, t, 10) \quad (9)$$

Où :

$$N_{down} = |Ret(r_j, t, 10) \leq m| \quad ; \quad N_{up} = |Ret(r_j, t, 10) > m|$$

Ensuite, il faut calculer les écarts types rééchelonnés (avec C_{ES} comme facteur d'échelle) décalés de $\hat{\mu}_{Ret \leq m}^{Ret(j)}$ et $\hat{\mu}_{Ret > m}^{Ret(j)}$:

$$\widehat{ASigma}_{down}^{Ret(j)} = C_{ES} \times \sqrt{\frac{1}{N_{down} - 1.5} \times \sum_{\substack{t=1 \\ Ret(r_j, t, 10) \leq m}}^N \left(Ret(r_j, t, 10) - \hat{\mu}_{Ret \leq m}^{Ret(j)} \right)^2} - \hat{\mu}_{Ret \leq m}^{Ret(j)} \quad (10)$$

$$\widehat{ASigma}_{up}^{Ret(j)} = C_{ES} \times \sqrt{\frac{1}{N_{up} - 1.5} \times \sum_{\substack{t=1 \\ Ret(r_j, t, 10) > m}}^N \left(Ret(r_j, t, 10) - \hat{\mu}_{Ret > m}^{Ret(j)} \right)^2} + \hat{\mu}_{Ret > m}^{Ret(j)} \quad (11)$$

Où $C_{ES} = 3$.

Finalement, les chocs calibrés sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned} CS_{down}(r_j) &= \widehat{ASigma}_{down}^{Ret(j)} \times \left(0.95 + \frac{1}{\sqrt{(N_{down} - 1.5)}} \right) \\ CS_{up}(r_j) &= \widehat{ASigma}_{up}^{Ret(j)} \times \left(0.95 + \frac{1}{\sqrt{(N_{up} - 1.5)}} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$\left(0.95 + \frac{1}{\sqrt{(N_{down} - 1.5)}} \right)$ et $\left(0.95 + \frac{1}{\sqrt{(N_{up} - 1.5)}} \right)$ étant les facteurs de compensation de l'incertitude.

- Pour ce qui concerne **la méthode fallback**, deux cas sont à distinguer :

1. Le facteur de risque non modélisable coïncide avec l'un des facteurs de risque inclus dans la méthode standard basée sur les sensibilités, c'est à dire les facteurs de risque définis dans la section 3, sous-section 1, du CRR (Capital Requirement Regulation) au chapitre 1a, "Approche standard alternative" : l'institution doit donc identifier la pondération de risque à utiliser comme spécifié dans la méthode standard basée sur les sensibilités, puis multiplier cette pondération de risque par $1.15 \sqrt{\frac{10}{LH(j)}}$. Notons que les pondérations de risque de la méthode basée sur les sensibilités ont été calibrées pour capturer l'horizon de liquidité des facteurs de risque, le scalaire $\sqrt{\frac{10}{LH(j)}}$ exclut donc cet effet. Le scalaire 1.15 est inclus pour s'assurer que la méthode fallback conduit à un résultat plus prudent que toute autre méthode proposée (historique, asigma ...).

2. Le facteur de risque non modélisable ne coïncide pas avec l'un des facteurs de risque inclus dans la méthode standard basée sur les sensibilités : l'institution doit donc obtenir les chocs calibrés à la hausse et à la baisse au moyen d'un autre facteur de risque. Plus précisément, l'institution doit identifier un autre facteur de risque (r_{other}) de la même nature que le facteur de risque non modélisable en question et pour lequel plus de 12 observations enregistrées sont disponibles. La méthode en étapes est ensuite utilisée (méthode historique ou asigma) pour obtenir les chocs calibrés à la hausse et à la baisse qui doivent être redimensionnés avec le scalaire $1.35 / (0.95 + \frac{1}{\sqrt{N_{other}-1.5}})$. La division par $(0.95 + \frac{1}{\sqrt{N_{other}-1.5}})$ est faite pour compenser l'effet du facteur de compensation de l'incertitude qui est utilisé par les institutions lors du calibrage de ces chocs, et la multiplication par 1.35 assure que la méthode fallback conduit à des résultats plus conservateurs.

3.2.2 Détermination du CSSRFR (calibrated stress scenario risk factor range) :

Les chocs calibrés $CS_{down}(r_j)$ et $CS_{up}(r_j)$ obtenus en utilisant l'une des méthodes précédentes doivent être appliqués au facteur de risque à la date de référence $r_j(D^*)$ dans les deux directions pour obtenir l'intervalle correspondant au scénario de stress calibré, c'est-à-dire :

$$CSSRFR(r_j(D^*)) = [r_j(D^*) - CS_{down}(r_j), r_j(D^*) + CS_{up}(r_j)] \quad (13)$$

Pour la méthode fallback, quand le type de rendement précisé par la méthode standard basée sur les sensibilités est le rendement relatif, l'intervalle correspondant au scénario de stress calibré est plutôt donné par :

$$CSSRFR(r_j(D^*)) = [r_j(D^*) \times (1 - CS_{down}^{fallback}(r_j)), r_j(D^*) \times (1 + CS_{up}^{fallback}(r_j))] \quad (14)$$

3.2.3 Détermination du scénario extrême de choc futur :

Dans la dernière étape, les institutions doivent déterminer le scénario extrême du choc futur en identifiant le choc conduisant à la pire perte que l'institution pourrait subir si le facteur de risque non modélisable évolue dans l'intervalle CSSRFR identifié précédemment, soit :

$$FS_{D^*}[r_j] = \underset{r_j \in CSSRFR(r_j(D^*))}{\operatorname{argmax}} \left[\text{loss}_{D^*}^{\text{single}}(r_j) \right] \quad (15)$$

3.2.4 La mesure de risque du scénario de stress :

Finalement, la mesure de risque du scénario de stress sur un horizon de 10 jours pour le NMRF j à la date D^* est la suivante :

$$SS_{10 \text{ day}, D^*}^{\text{method}, j} = \text{loss}_{D^*}(FS_{D^*}^{\text{method}}[r_j]) \quad (16)$$

Dans la méthode en étapes, la mesure de risque du scénario de stress est une estimation de l'expected shortfall en faisant l'hypothèse que $ES[\text{loss}(r_j(D_t))]$ est approximativement égale à $\text{loss}(ES[r_j(D_t)]) \approx$

$\text{loss}(FS_t[r_j])$, ce qui n'est pas toujours le cas. On prend cela en considération en ajoutant le coefficient d'ajustement de non-linéarité $\kappa_{D^*}^j \stackrel{\text{def}}{=} \max \left[1, \frac{ES[\text{loss}(r_j)]}{\text{loss}(FS_{D^*}[r_j])} \right]$. Ainsi, la mesure de risque du scénario de stress est la suivante :

$$SS_{D^*}^{\text{method},j} = \sqrt{\frac{LH_{\text{adj}}(j)}{10}} \times SS_{10\text{days},D^*}^{\text{method},j} \times \kappa_{D^*}^j \quad (17)$$

Où :

$LH_{\text{adj}}(j) = \max(20, LH(j))$, $LH(j)$ étant l'horizon de liquidité du facteur de risque j .

3.3 Agrégation des mesures de risque du scénario de stress :

La formule d'agrégation à utiliser pour calculer la charge en capital associée aux facteurs de risque non modélisables est la suivante, transposant la norme FRTB 33.17 :

$$SS_{D^*} = \sqrt{\sum_{i=1}^I (SS_{D^*}^{\text{method},i})^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^J (SS_{D^*}^{\text{method},j})^2} + \sqrt{\left(\rho \times \sum_{k=1}^K SS_{D^*}^{\text{method},k} \right)^2 + (1 - \rho^2) \sum_{k=1}^K (SS_{D^*}^{\text{method},k})^2} \quad (18)$$

Où :

- I facteurs de risque sont liés aux risques de spread de crédit idiosyncratiques, J facteurs de risques sont liés aux risques d'actions idiosyncratiques, et K facteurs de risques restants qui ne sont liés ni aux risques de spread de crédit idiosyncratiques ni aux risques d'actions idiosyncratiques.

- ρ est égal ici à 60%.

4 Implémentation de la méthode de place

4.1 Cadre de l'étude

Nous disposons d'une base de données avec les prix de swaptions à la monnaie (ATM) avec pour sous-jacent un swap contre Euribor 6 mois pour 516 jours entre 2019 et 2020 (258 jours de trading par année) et pour 16 paires maturité-ténor, ce qui fait un total de 8256 observations. Pour notre étude, nous considérons les variables suivantes :

- Date : du 4 janvier 2019 au 31 décembre 2020
- Maturité : temps exprimé en année jusqu'au premier paiement du swap sous-jacent. Les valeurs possibles sont 5, 10, 15, 20, 25 et 30 ans.
- Ténor : la durée en année du swap sous-jacent. Les valeurs possibles sont 5, 10, 15, 20, 25 et 30 ans.
- Taux swap : taux swap forward pour une maturité, ténor et date spécifique.
- Annuité : somme des zero-coupons sur le tenor du swap.
- Prix : prix d'une swaption exprimé comme une fraction par rapport au nominal.
- Obs/inobs : cette variable vaut 1 si on considère que la valeur du prix a été observée à la date donnée. C'est le résultat d'un tirage au hasard sur les 258 jours de trading par année. Nous avons respecté le critère de modélisabilité donnée par la réglementation.

Nous avons considéré différentes combinaisons obs/inobs pour représenter trois scénarios selon la disponibilité des prix des swaptions non-modélisables : scénario de disponibilité modérée, scénario de disponibilité faible et scénario réaliste (voir table 1).

Scénario	Disponibilité modérée		Disponibilité faible		Réaliste	
Swaption	Observé	Non observé	Observé	Non observé	Observé	Non observé
10Y30Y	120	396	7	509	90	426
20Y20Y	120	396	7	509	60	356
25Y25Y	120	396	7	509	30	486
30Y30Y	120	396	7	509	7	509

Table 1 Nombre de prix observés et non observés

- Stress/calm : la période de stress comprend les jours de trading compris entre le 27/03/2019 et le 24/03/2020. Cette variable vaut 1 si la date appartient à la période stressée.
- Volatilité : volatilité implicite exprimée en points de base, c'est à dire dix-millièmes d'une unité, soit un facteur de 0,0001 sur l'unité.

Notons $\mathcal{Y}$ l'ensemble des paires maturité-ténor correspondant aux NMRF :

$$\mathcal{Y} = \{(20, 20), (25, 25), (30, 30), (10, 30)\}.$$

et $\mathcal{X}$ l'ensemble des paires maturité-ténor correspondant aux MRF :

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = \{ & (5, 5), (5, 10), (5, 15), (5, 20), (5, 25), (5, 30), \\ & (10, 5), (10, 10), (10, 15), (10, 20), (10, 25), (10, 30), \\ & (15, 15), (20, 20), (25, 25), (30, 30) \}. \end{aligned}$$

En utilisant la variable date comme nouvel indice de notre base de données, nous avons décidé de créer des variables prix, taux swap et annuités pour chaque paire maturité-ténor disponible. La variable stress/calm est conservée telle quelle. Nous remarquons que la variable obs/inobs est

aussi définie pour chaque paire maturité-ténor mais elle ne fait pas partie des variables à considérer pour la modélisation.

Ainsi, nous obtenons une base de données avec 516 observations (une pour chaque jour de trading en 2019 et 2020) et 53 variables.

Les swaptions ont été cotées en volatilité normale. Les prix sont obtenus en utilisant le modèle bachelier. Ces données ont été utilisées pour implémenter la méthode de place sous python.

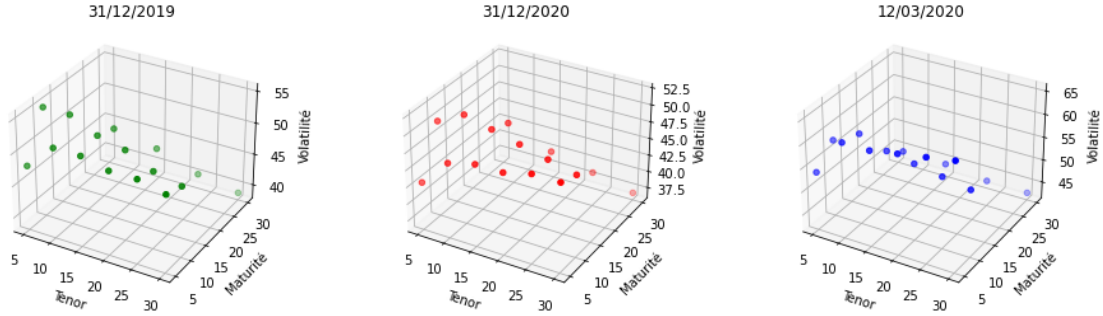


Figure 3 Volatilités normales en bps pour des swaptions de différentes maturités et tenors à différentes dates

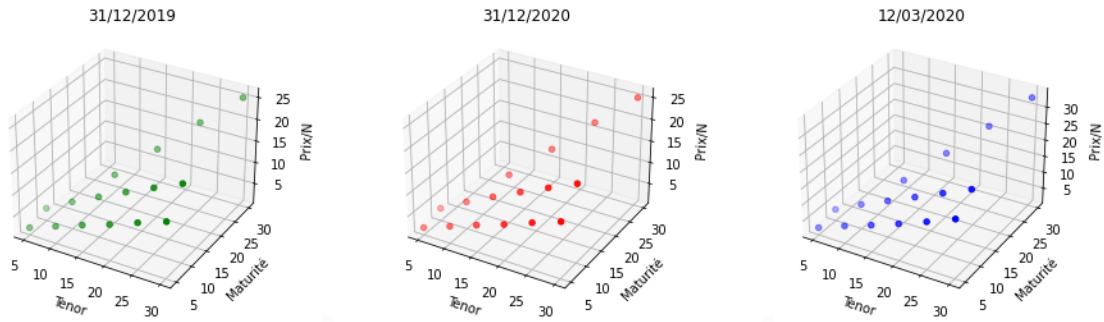


Figure 4 Prix bachelier en pourcentage du nominal pour différentes maturités et tenors à différentes dates

4.2 Résultats

Les facteurs de risque considérés sont les volatilités des swaptions dont la maturité et le tenor vont de 5 à 30 ans avec un pas de 5 ans. Les dates de référence choisies pour le calcul des mesures de risque de scénario de stress et des charges en capital sont : 31/12/2019 pour l'année 2019, 31/12/2020 pour l'année 2020, et 12/03/2020 pour la période stressée (de mi-mars 2019 jusqu'à mi-mars 2020). L'EBA propose l'approche suivante pour la détermination de la période stressée S^i :

$$S^i = \underset{P}{\operatorname{argmax}} \left[\sum_{j \in i} SS_{D^*}^{j,P} \right] ; i \in \{\text{IR, CS, EQ, FX, CM}\} \quad (19)$$

Dans la base de donnée nous observons que les swaptions dont la somme de la maturité et du tenor sont supérieur à 40 ans sont non observables. Par conséquence, les facteurs de risque non modélisables étudiés sont les volatilités associées aux swaptions 20Y20Y, 25Y25Y, 30Y30Y et 10Y30Y.

Dans le but de comparer les quatre méthodes (directe, sigma, asigma et fallback), nous avons considéré dans chacune des simulations un même nombre de prix observables pour chacun des quatre swaptions.

Les tableaux suivants regroupent les résultats des mesures de risque de scénario de stress en pourcentage pour les facteurs de risque non modélisables ainsi que le calcul des charges en capital pour les années 2019, 2020 et pour la période stressée dans le cas où l'institution financière a réussi à avoir une grande disponibilité des prix ($M > 200$) pour les périodes en question. Dans ce cas, l'institution peut appliquer la méthode directe ou la méthode historique. La méthode directe reste optionnelle car nécessite un effort de calcul important de la part des institutions pour calculer les évaluations des pertes pour chaque facteur de risque. Elle donne des résultats très proches de la méthode historique et a l'avantage d'être plus précise. Nous avons implémenté les deux méthodes dans le cadre de notre étude qui ont donné des résultats très proches voire similaires.

Swaption \ Période	2019	2020	Période stressée
30Y30Y	3.31	6.42	7.57
25Y25Y	2.75	4.99	5.71
20Y20Y	2.04	3.64	3.90
10Y30Y	2.56	4.46	4.68

Table 2 SSRM pour les facteurs de risque non modélisables, méthode directe

Période	2019	2020	Période stressée
Charge en capital	7.72	14.17	15.92

Table 3 Charges en capital liées aux NMRF , méthode directe

Dans le cas où l'institution financière réussit à avoir une disponibilité moyenne des prix ($12 < M \leq 200$), la méthode asigma est à utiliser. L'EBA avait également proposé dans un premier temps l'utilisation de la méthode sigma quand la méthode historique n'était pas disponible. La méthode sigma propose des chocs calibrés à la hausse et à la baisse qui sont égaux, par contre la méthode historique donne généralement des chocs calibrés à la hausse et à la baisse différents suite à l'asymétrie des séries temporelles financières. L'EBA a envisagé d'incorporer une telle asymétrie dans la méthode sigma et donc de ne garder que la méthode asigma pour la suite. Les tableaux suivants donnent les résultats de l'implémentation de la méthode sigma et asigma en python :

Période Swaption	2019	2020	Période stressée
30Y30Y	4.32	6.82	7.65
25Y25Y	4.75	5.88	7.42
20Y20Y	3.57	3.74	4.90
10Y30Y	4.24	7.35	7.57

Table 4 SSRM pour les facteurs de risque non modélisables, méthode sigma

Période	2019	2020	Période stressée
Charge en capital	12.20	17.30	19.94

Table 5 Charges en capital liées aux NMRF , méthode sigma

Période Swaption	2019	2020	Période stressée
30Y30Y	4.11	7.09	7.92
25Y25Y	3.83	5.72	6.57
20Y20Y	2.55	3.26	3.77
10Y30Y	3.20	6.34	5.38

Table 6 SSRM pour les facteurs de risque non modélisables, méthode asigma

Période	2019	2020	Période stressée
Charge en capital	9.92	16.32	17.23

Table 7 Charges en capital liées aux NMRF , méthode asigma

Dans le cas où l'institution financière n'a pas assez de prix disponibles ($M \leq 12$), elle doit utiliser la méthode fallback. Les tableaux suivants regroupent les résultats des mesures de risque de scénario de stress en pourcentage pour les facteurs de risque non modélisables ainsi que le calcul des charges en capital pour les années 2019, 2020 et pour la période stressée dans ce cas :

Période Swaption	2019	2020	Période stressée
30Y30Y	22.84	29.17	38.39
25Y25Y	19.74	24.12	30.43
20Y20Y	16.33	18.59	22.98
10Y30Y	18.41	21.06	25.78

Table 8 SSRM pour les facteurs de risque non modélisables, méthode fallback

Période	2019	2020	Période stressée
Charge en capital	55.89	67.31	85.30

Table 9 Charges en capital liées aux NMRF , méthode fallback

Finalement pour illustrer un cas pratique, le tableau suivant présente la charge en capital liée aux NMRF pour un portefeuille constitué de 4 swaptions non modélisables (30Y30Y, 25Y25Y, 10Y30Y, 20Y20Y) où le calcul du scénario de stress de la 30Y30Y est effectué par la méthode fallback, 10Y30Y, 20Y20Y et 25Y25Y par la méthode asigma :

Période	2019	2020	Période stressée
Charge en capital	25.64	33.15	42.49

Table 10 Charges en capital liées aux NMRF pour un portefeuille de swaptions

5 Gestion des facteurs de risque non modélisables

Dans cette partie, on présentera les différentes techniques utilisées pour augmenter les disponibilités des prix liés aux facteurs de risque non modélisables ainsi que les résultats obtenus.

5.1 Description de la méthodologie

Notre objectif consiste à augmenter la modélisabilité des facteurs de risque non modélisables en augmentant la disponibilité des prix. Les étapes à suivre sont les suivantes :

1. Compléter les données des facteurs de risque modélisables (MRF) aux dates manquantes en interpolant les valeurs connues et les normaliser.
2. Séparer les données en ensemble d'apprentissage et de test. Normalement on réserve 20% des données pour mesurer la qualité de nos modèles. Si les données disponibles ne sont pas assez nombreuses, on utilisera la validation croisée pour estimer l'erreur de nos modèles.
3. Ajuster un modèle de machine learning, comme le LASSO, l'arbre de régression (interprétables), la forêt aléatoire ou le XGBoost (boîtes noires, non interprétables) avec l'ensemble d'apprentissage.
4. Construire le proxy. On ajoute aux valeurs observées des NMRFs les valeurs prédites par le modèle pour les dates manquantes.
5. La série temporelle reconstituée est utilisée pour calculer l'*Expected Shortfall*.

5.2 Modélisation des prix des swaptions

Notre premier objectif est de modéliser le prix d'une swaption non-modélisable pour une date donnée en fonction des prix des swaptions modélisables, les annuités, les taux swap et la variable stress/calm à la même date.

Ainsi, les variables à expliquer sont :

- Les prix $p_{i,j}$ pour $(i,j) \in \mathcal{V}$,

A partir des variables explicatives suivantes :

- Les prix, $p_{i,j}$ des swaptions telles que $(i,j) \in \mathcal{X}$.

On remarque que certaines de ces valeurs sont marquées comme non observées et ainsi nous devrons aborder la problématique de compléter ces valeurs avant de pouvoir les utiliser pour ajuster nos modèles.

- Les taux swap, $s_{i,j}$, et annuités, $A_{i,j}$ des swaptions où $(i,j) \in \mathcal{X} \cup \mathcal{V}$, c'est-à-dire pour toutes les maturités et ténors disponibles.
- La variable stress/calm.

Nous avons donc un total de quatre variables à expliquer (quatre swaptions) et 45 variables explicatives.

Pour chacune des swaptions, on va construire quatre modèles pour le prix :

- Régression LASSO,
- Arbre de régression,
- Forêt aléatoire et
- XGBoost.

5.3 Description du modèle

Nous présentons ici les mesures d'erreurs qui nous aideront à évaluer la performance de nos modèles. Les descriptions et résultats des modèles testés et moins performants sont disponibles en annexe.

5.3.1 Mesures d'erreurs

Dans chacun des cas, nous avons utilisé l'erreur quadratique estimée par validation croisée pour trouver les meilleurs hyper-paramètres de chaque modèle considéré. Nous rappelons ici les définitions de l'erreur quadratique moyenne (MSE), l'erreur absolue moyenne (MAE), et l'erreur en pourcentage absolue moyenne (MAPE) : on note n le nombre d'observations sur l'ensemble de test, y la vraie valeur du prix et $\hat{y}$ sa valeur estimée.

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (20)$$

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i| \quad (21)$$

$$MAPE = 100\% \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \quad (22)$$

5.3.2 Régression LASSO

Nous cherchons à estimer la variable réelle Y qui représente le prix d'une swaption non modélisable à partir du vecteur $X = (x^1, x^2, \dots, x^{45}) \in \mathbb{R}^{45}$, qui correspond aux 45 variables explicatives dans la base de données à notre disposition (p.e., les prix de toutes les swaptions modélisables, les annuités pour différentes swaptions, etc.).

Le modèle de régression LASSO (consulter [Tib96]) suppose que Y suit un modèle linéaire selon l'équation suivante :

$$Y = \beta_1 x^1 + \dots + \beta_{45} x^{45}. \quad (23)$$

Le but est d'estimer les coefficients inconnus $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{45}) \in \mathbb{R}^{45}$ qui quantifient le degré d'influence de chaque variable sur la valeur de Y . Habituellement, la méthode des moindres carrés est utilisée pour trouver la meilleure approximation pour β mais en raison du nombre important de variables explicatives, nous y ajouterons à ceci une pénalisation L^1 , afin d'obtenir un modèle parcimonieux (avec peu de variables ayant une influence non nulle).

Pour une valeur de $\lambda > 0$ fixée, l'estimateur LASSO $\hat{\beta}_\lambda$ de β est donné par :

$$\hat{\beta}_\lambda = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^{45}} \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta^t X_i)^2 + \lambda \sum_{j=1}^{45} |\beta_j|, \quad (24)$$

où n est le nombre d'observations dans la base de données. La définition de $\hat{\beta}_\lambda$ implique qu'il minimise en même temps l'erreur d'estimation quadratique et sa norme L^1 . Puisqu'il s'agit d'un problème d'optimisation quadratique, sa complexité algorithmique est donnée par $\mathcal{O}(K^3 + K^2n)$, où K correspond au nombre de variables du modèle (dans notre cas $K = 45$).

Le paramètre λ , qui reste un choix, permet d'éliminer les variables considérées comme non pertinentes (en faisant $\beta_j^* = 0$). Plus λ est grand, plus des coefficients $\hat{\beta}_j$ seront nuls. Nous pouvons dire alors que ce modèle fait de la sélection de variables automatiquement. À la différence de l'estimateur de moindres carrés, il se comporte bien même si les variables explicatives sont corrélées, grâce à la pénalisation L^1 .

Pour sélectionner une valeur de λ adéquate, nous pouvons comparer l'erreur estimée par validation croisée sur les données d'apprentissage pour des différentes valeurs de λ . Dans notre étude, nous avons considéré des valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ pour le paramètre λ . L'erreur quadratique moyenne pour les modèles avec la valeur de λ optimales sont montrées dans le tableau. Comme attendu, nous remarquons ici que le pouvoir prédictif est moins bon pour le swaption 25Y25Y et le swaption 30Y30Y. Ces deux points semblent rester non modélisable, même après extrapolation.

11.

Prix des swaptions	Disponibilité modérée	Disponibilité faible	Réaliste
$p_{10,30}$	0.079	0.330	0.075
$p_{20,20}$	0.103	0.119	0.048
$p_{25,25}$	0.168	0.262	0.126
$p_{30,30}$	0.304	0.482	0.615

Table 11 Erreur de la régression LASSO pour le prix des swaptions

L'un des avantages majeurs de la régression LASSO par rapport aux autres modèles, qui seront présentés plus tard, est que les valeurs des coefficients obtenus sont interprétables.

Par exemple, dans le cas du prix de la swaption 10Y30Y, la variable avec le plus d'influence est le prix du swaption 10Y25Y. En plus, seulement 8 variables d'un total de 45 variables ont une réelle influence, c'est-à-dire, des coefficients associés non nuls, comme le montre le tableau 12.

Prix de la swaption	Variables Explicatives	Coefficient
$p_{10,30}$	1. Price 10Y25Y	0.453
	2. Annuity 30Y30Y	0.270
	3. Price 10Y20Y	0.129
	4. Price 5Y30Y	0.087
	5. Price 10Y15Y	0.033
	6. Price 5Y25Y	0.025
	7. Price 10Y5Y	0.020
$p_{20,20}$	1. Annuity 30Y30Y	0.541
	2. Price 10Y20Y	0.270
	3. Price 15Y15Y	0.217
	4. stress\calm	0.147
	5. swap rate 25Y25Y	-0.027
	6. Price 5Y20Y	0.012
	7. Price 10Y10Y	0.003
	8. Annuity 5Y5Y	0.001
$p_{25,25}$	1. Annuity 30Y30Y	0.731
	2. stress\calm	0.179
	3. swap rate 15Y15Y	-0.111
	4. Price 5Y30Y	0.104
	5. Price 10Y10Y	0.032
	6. swap rate 25Y25Y	-0.003
$p_{30,30}$	1. Annuity 30Y30Y	0.613
	2. Annuity 20Y20Y	0.530
	3. stress\calm	0.454
	4. Price 5Y5Y	0.134
	5. Price 15Y15Y	-0.023

Table 12 Coefficients du modèle LASSO pour le scénario réaliste

5.4 Comparaison des performances

Parmi les modèles testés, le modèle LASSO a systématiquement la meilleure performance pour toutes les paires maturité-ténor et sous tous les scénarios à exception de la swaption 10Y30Y (voir table 13). Sous le scénario d'une disponibilité modérée de prix, la forêt aléatoire a la meilleure performance.

Un avantage majeur du LASSO par rapport aux autres modèles est son interprétabilité et sa parcimonie. Il réalise une sélection des variables les plus pertinentes pour le modèle.

Prix des swaptions	Modèle	Disponibilité modérée	Disponibilité faible	Réaliste
$p_{10,30}$	LASSO	0.079	0.330	0.075
	Regression tree	0.888	1.597	0.107
	Random Forest	0.065	0.361	0.081
	XGBoost	0.119	2.891	0.090
$p_{20,20}$	LASSO	0.103	0.119	0.048
	Regression tree	0.173	1.760	0.491
	Random Forest	0.207	0.496	0.110
	XGBoost	0.834	2.433	0.129
$p_{25,25}$	LASSO	0.168	0.262	0.126
	Regression tree	0.857	6.289	1.265
	Random Forest	0.200	4.917	0.227
	XGBoost	2.437	9.090	0.707
$p_{30,30}$	LASSO	0.304	0.482	0.615
	Regression tree	0.584	8.152	9.563
	Random Forest	0.425	0.845	3.422
	XGBoost	11.011	9.752	14.427

Table 13 Modèles pour le prix des swaptions

Les graphiques de la figure 5 et 6 montrent les *proxies* obtenus avec la régression LASSO. À titre indicatif, l'écart-type des erreurs induites par le modèle est représenté par l'ampleur de la région ombrée autour des valeurs non observées.

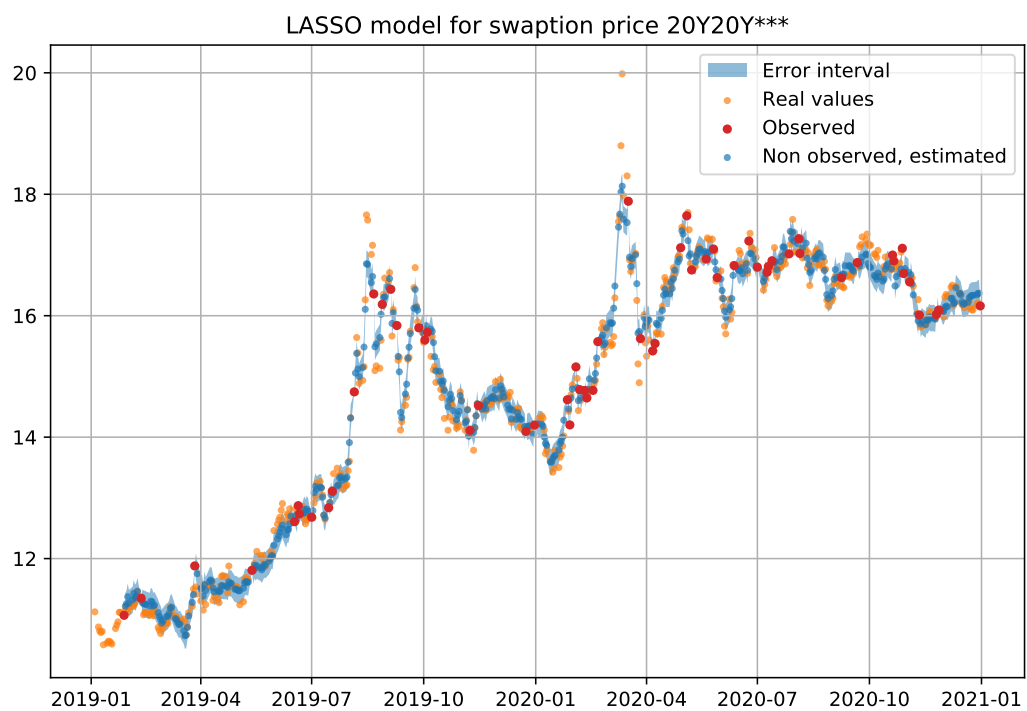
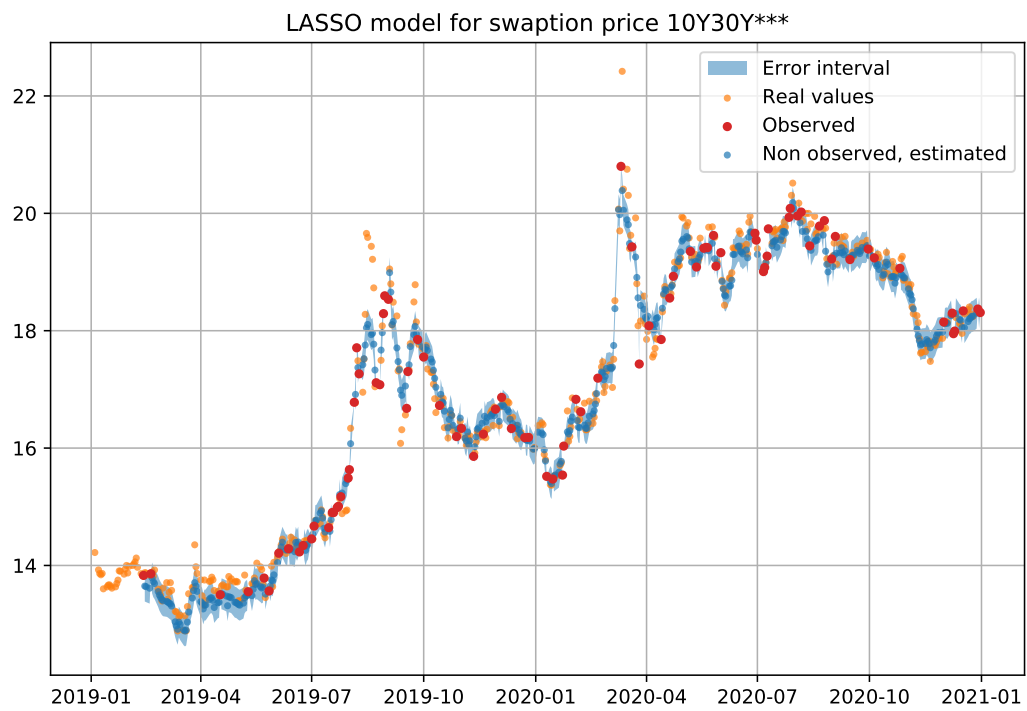


Figure 5 Proxies pour les prix des swaptions (***) sous le scénario réaliste)

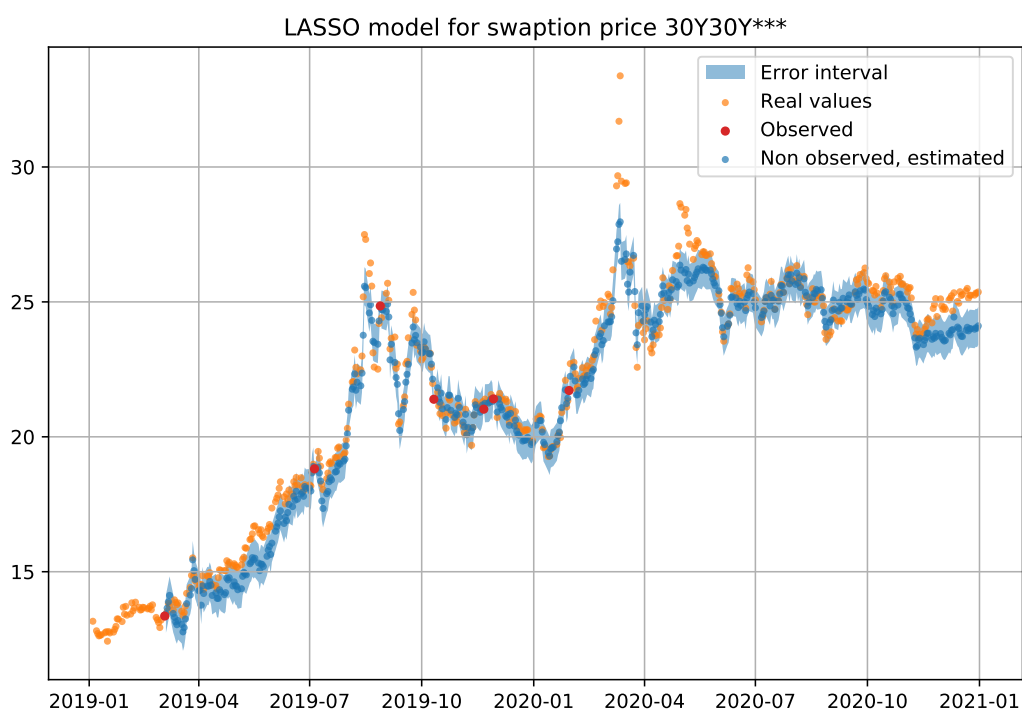
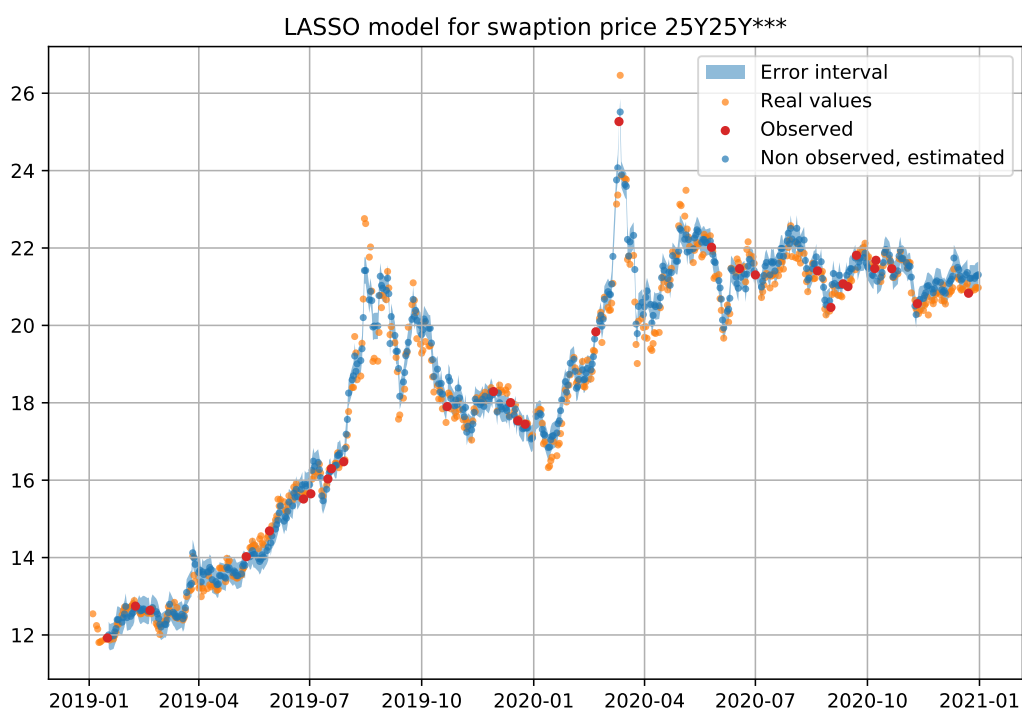


Figure 6 Proxies pour les prix des swaptions (***) sous le scénario réaliste)

5.5 Calcul des nouvelles charges en capital

Les techniques expliquées précédemment permettent de remplacer les valeurs manquantes (valeurs non observées) des facteurs de risque non modélisables sur la période étudiée (les deux années 2019 et 2020). Par conséquent, la disponibilité des prix augmente et les calculs des charges en capital peuvent s'effectuer directement avec la mesure de risque ES. Ainsi, on remplace les valeurs non observées sur le marché pour chaque facteur de risque non modélisable par les prédictions obtenues avec la régression lasso et on s'intéresse de nouveau aux mesures de risque :

- **Dans le cas d'une grande disponibilité des prix ($M > 200$)**, la méthode de place utilisée pour le calcul des charges en capital est la **méthode directe/méthode historique**. Après application de l'algorithme, on peut passer directement par la mesure de risque ES, le tableau suivant regroupe les résultats obtenus pour ce premier cas :

Swaption \ Période	2019	2020	Période stressée
30Y30Y	3.27	6.34	7.48
25Y25Y	2.72	4.93	5.64
20Y20Y	2.01	3.60	3.85
10Y30Y	2.52	4.40	4.62

Table 14 Calculs de l'ES correspondant aux quatre swaptions 30Y30Y, 25Y25Y, 20Y20Y, 10Y30Y après augmentation des disponibilités des prix, pour une disponibilité initiale > 200

Ces résultats sont à comparer avec les résultats obtenus table 1. Nous notons que la charge en capital pour un portefeuille constitué d'une seule swaption liée à un facteur de risque non modélisable diminue.

- **Dans le cas d'une disponibilité moyenne des prix ($12 < M \leq 200$)**, la méthode de place utilisée pour le calcul des charges en capital est la méthode **Asigma**. Après application de l'algorithme, on peut passer directement par la mesure de risque ES. Pour compenser le bruit lié à l'utilisation du modèle Lasso, un calcul de "réserve modèle" est ajouté au montant de la charge en capital. On peut se référer au document [PEY19] pour la méthodologie de calcul. L'objectif étant de calculer une valeur de sortie des différents instruments avec un niveau de confiance de 90% afin de s'assurer que les valeurs utilisées soient en adéquation avec des valeurs plausiblement atteignables. Le calcul de la réserve modèle passe donc par le calcul d'un quantile 90 % sur les erreurs de prédiction. Le tableau suivant regroupe les résultats des calculs ES + "réserve modèle". On observe que pour le swaption 30Y30Y l'ajout de l'AVA confirme le caractère non modélisable de ce dernier. En effet, la réserve modèle rend la charge en capital après application du Lasso supérieure à la charge en capital NMRF :

	2019			2020		
Swaption	Charge en Capital	Réserve model	Total	Charge en Capital	Réserve model	Total
30Y30Y	2.85	1.43	4.28	6.83	0.37	7.20
25Y25Y	3.34	0.88	4.22	4.31	0.20	4.51
20Y20Y	1.82	0.39	2.21	2.53	0.13	2.66
10Y30Y	2.61	0.24	2.85	3.98	0.16	4.14

	Période stressée		
Swaption	Charge en Capital	Réserve model	Total
30Y30Y	7.65	0.98	8.63
25Y25Y	4.38	0.20	4.58
20Y20Y	2.80	0.13	2.93
10Y30Y	4.06	0.18	4.24

Table 15 Calculs de l'ES + "reserve model" correspondant aux quatre swaptions 30Y30Y, 25Y25Y, 20Y20Y, 10Y30Y après augmentation des disponibilités des prix, pour une disponibilité initiale moyenne

En comparant ces résultats avec la méthode de place (voir table 6), on remarque que la charge en capital pour un portefeuille constitué d'une seule swaption liée à un facteur de risque non modélisable diminue pour les swaptions 10Y30Y, 20Y20Y, et augmente parfois pour les swaptions 30Y30Y et 25Y25Y après ajout de la réserve modèle. Ce qui est cohérent avec le caractère non observable de ces derniers, même après l'extrapolation par Lasso.

- **Dans le cas d'une disponibilité faible des prix ($M \leq 12$)**, la méthode de place utilisée pour le calcul des charges en capital est la méthode **Fallback**. Une disponibilité faible est généralement constatée pour des swaptions de grandes maturités et de grands tenors. Le tableau suivant regroupe les résultats des calculs ES + "réserve modèle" après Lasso :

	2019			2020		
Swaption	Charge en Capital	Réserve model	Total	Charge en Capital	Réserve model	Total
30Y30Y	2.73	0.65	3.38	5.37	1.58	6.95
25Y25Y	0.61	0.35	0.96	0.86	0.89	1.75
20Y20Y	1.00	0.32	1.32	0.90	0.26	1.16
10Y30Y	3.05	0.24	3.29	3.62	1.29	4.91

	Période stressée		
Swaption	Charge en Capital	Réserve model	Total
30Y30Y	5.67	0.55	6.22
25Y25Y	1.03	0.43	1.46
20Y20Y	1.23	0.48	1.71
10Y30Y	4.16	0.23	4.39

Table 16 Calculs de l'ES + "réserve modèle" correspondant aux quatre swaptions 30Y30Y, 25Y25Y, 20Y20Y, 10Y30Y après augmentation des disponibilités des prix, pour une disponibilité initiale faible

Nous nous intéressons par la suite à un portefeuille constitué de quatre swaptions non modélisables (30Y30Y, 25Y25Y, 10Y30Y, 20Y20Y), où la swaption 30Y30Y a une disponibilité initiale faible, les swaptions 20Y20Y, 10Y30Y et 25Y25Y ont une disponibilité initiale moyenne. C'est le cas traité dans la table 10. Cette table présente la charge en capital liée aux NMRF pour un tel portefeuille initial. Après application du Lasso, on s'intéresse de nouveau aux calculs des charges en capital pour les années 2019, 2020 et pour la période stressée considérée :

Période	2019	2020	Période stressée
Charge en capital	9.98	10.74	12.01

Table 17 Charges en capital liées aux NMRF après augmentation des disponibilités des prix

On ajoute ensuite à ces calculs de charge en capital le calcul des "réserves modèle", le tableau suivant illustre les résultats obtenus :

Période	2019	2020	Période stressée
Charge en capital	11.18	12.76	13.70

Table 18 Charges en capital liées aux NMRF après augmentation des disponibilités des prix + "réserve modèle"

	2019			2020		
	Charge en Capital	Réserve model	Total	Charge en Capital	Réserve model	Total
MDP	25.64	0	25.64	33.15	0	33.15
ML	9.98	1.20	11.18	10.74	2.02	12.76

	Période stressée		
	Charge en Capital	Réserve model	Total
MDP	42.49	0	42.49
ML	12.01	1.69	13.70

Table 19 Comparaison ES Méthode de Place (MDP) et Machine Learning (ML)

La charge en capital pour 2019 passe de 25.64 à 11.18, soit une diminution de 56.39 %. La charge en capital pour 2020 passe de 33.15 à 12.76, soit une diminution de 61.5 %. Et la charge en capital pour la période stressée passe de 42.49 à 13.70, soit une diminution de 67.75 %.

6 Conclusion

Cet article a permis dans un premier temps de nous intéresser à la réglementation FRTB et de voir en détail les différentes méthodologies de calcul des charges en capital imposées par l'EBA, pour les facteurs de risque non modélisable (NMRF), dont l'entrée en vigueur aura lieu en janvier 2022. Pour cela, on a travaillé sur des swaptions à la monnaie de différentes maturités et différents tenors. La distinction entre facteurs modélisables et non modélisables se fait grâce au Risk Factor Eligibility Test. De plus, les méthodologies de calcul de charge en capital pour ces derniers sont différentes et impliquent une charge en capital plus grande pour les NMRFs.

Pour réduire la charge liée aux NMRFs, nous avons étudié plusieurs techniques de Machine Learning afin de prédire certaines valeurs non observées. Par conséquent, on a pu passer de la méthode de calcul réservé aux NMRFs à la méthode de calcul Expected Shortfall réservée aux facteurs de risque modélisables pour certains swaptions du portefeuille considéré. Une comparaison des résultats obtenus avec la méthode de place a montré que cette nouvelle méthode réduit considérablement les charges liées aux NMRF. Finalement, comme attendu, les swaptions à tenor/maturité long restent cependant non modélisables.

Références

- [Tib96] Robert TIBSHIRANI. “Regression Shrinkage and Selection via the Lasso”. In : *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 58.1 (1996), p. 267-288. ISSN : 00359246. URL : <http://www.jstor.org/stable/2346178>.
- [Bre01] L. BREIMAN. “Random forests”. In : *Machine learning* 45.1 (2001), p. 5-32.
- [CG16] Tianqi CHEN et Carlos GUESTRIN. “XGBoost : A Scalable Tree Boosting System”. In : *CoRR* abs/1603.02754 (2016). arXiv : 1603.02754. URL : <http://arxiv.org/abs/1603.02754>.
- [Bre17] L. BREIMAN. *Classification and Regression Trees*. CRC Press, 2017. ISBN : 9781351460491. URL : <https://books.google.fr/books?id=MG1QDwAAQBAJ>.
- [Int19] Bank for INTERNATIONAL SETTLEMENTS. “Minimum Capital Requirements for Market Risk”. In : (fév. 2019). URL : <https://www.bis.org/bcbs/publ/d457.pdf>.
- [PEY19] Matthieu PEYLET. “Prudent Valuation – Calcul de l’Additional Valuation Adjustment”. In : (sept. 2019). URL : <https://www.nexialog.com/wp-content/uploads/2019/09/Note-Prudent-Valuation-Additional-Value-Adjustment.pdf>.
- [Aut20a] European Banking AUTHORITY. “Final Draft RTS on the calculation of the stress scenario risk measure under Article 325bk(3) of Regulation (EU) No 575/2013 (Capital Requirements Regulation 2 – CRR2)”. In : (déc. 2020). URL : https://www.eba.europa.eu/sites/default/documents/files/document_library/Publications/Draft%5C%20Technical%5C%20Standards/2020/RTS/961600/Final%5C%20draft%5C%20RTS%5C%20on%5C%20the%5C%20calculation%5C%20of%5C%20stress%5C%20scenario%5C%20risk%5C%20measure.pdf.
- [Aut20b] European Banking AUTHORITY. “Guidelines on criteria for the use of data inputs in the risk-measurement model referred to in Article 325bc of Regulation (EU) No 575/2013”. In : (déc. 2020). URL : https://www.eba.europa.eu/sites/default/documents/files/document_library/Publications/Draft%5C%20Technical%5C%20Standards/2020/RTS/961600/Final%5C%20draft%5C%20RTS%5C%20on%5C%20the%5C%20calculation%5C%20of%5C%20stress%5C%20scenario%5C%20risk%5C%20measure.pdf.

7 Annexes

7.1 Annexe A : Les différentes catégories de facteurs de risque

L'EBA propose 5 groupes de facteurs de risque, chaque groupe ayant son propre horizon de liquidité (10, 20, 40, 60 ou 120). La figure suivante représente une table publiée dans la revue fondamentale du trading book qui indique pour chaque catégorie de facteur de risque l'horizon de liquidité qui lui correspond.

Liquidity horizon n by risk factor		Table 2	
Risk factor category	n	Risk factor category	n
Interest rate: specified currencies - EUR, USD, GBP, AUD, JPY, SEK, CAD and domestic currency of a bank	10	Equity price (small cap): volatility	60
Interest rate: unspecified currencies	20	Equity: other types	60
Interest rate: volatility	60	Foreign exchange (FX) rate: specified currency pairs ^[1]	10
Interest rate: other types	60	FX rate: currency pairs	20
Credit spread: sovereign (investment grade, or IG)	20	FX: volatility	40
Credit spread: sovereign (high yield, or HY)	40	FX: other types	40
Credit spread: corporate (IG)	40	Energy and carbon emissions trading price	20
Credit spread: corporate (HY)	60	Precious metals and non-ferrous metals price	20
Credit spread: volatility	120	Other commodities price	60
Credit spread: other types	120	Energy and carbon emissions trading price: volatility	60
		Precious metals and non-ferrous metals price: volatility	60
Equity price (large cap)	10	Other commodities price: volatility	120
Equity price (small cap)	20	Commodity: other types	120
Equity price (large cap): volatility	20		

Figure 7 Les différentes catégories de facteurs de risque et leur horizon de liquidité

7.2 Annexe B :

$$t_{nn}(t) = \underset{t' \in \{2, \dots, M, M+1, \dots, M+d\}}{\operatorname{argmin}_{t' > t}} \left[\left| \frac{10 \text{ jours ouvrables}}{D_{t'} - D_t} - 1 \right| \right]$$

7.3 Annexe C : Arbre de régression

Nous considérons des observations $D_n = \{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$ indépendantes et de même loi, à valeurs dans $\mathbb{R}^{45} \times \mathbb{R}$ et nous souhaitons prédire la valeur de Y pour une nouvelle donnée d'entrée X .

Construire un arbre consiste à diviser l'espace en domaines rectangulaires par découpages récursifs, dont la complexité algorithmique est $\mathcal{O}(Kn \log n)$, où $K = 45$, le nombre de variables explicatives. L'algorithme CART choisi à chaque étape, la variable pour laquelle le partitionnement a lieu (consulter [Bre17]).

Nous considérons comme nœud initial de notre arbre le rectangle $R = \mathbb{R}^{45} \times \mathbb{R}$. Pour les étapes suivantes, étant donné un des rectangles R obtenu précédemment, pour une coordonnée j de $x \in \mathbb{R}^{45}$, c'est-à-dire, la j -ième variable explicative, notée x^j et un point de coupure $s \in \mathbb{R}$ donné, nous définissons les rectangles :

$$R_1 = \{(x, y) \in R : x^j \leq s\}, \quad R_2 = \{(x, y) \in R : x^j > s\}. \quad (25)$$

Pour choisir la coupure optimale, nous minimisons en $j \in \{1, 2, \dots, 45\}$ et en $s \in \mathbb{R}$, l'erreur quadratique suivante :

$$\sum_{(X_i, Y_i) \in R_1} (Y_i - \bar{Y}_{R_1})^2 + \sum_{(X_i, Y_i) \in R_2} (Y_i - \bar{Y}_{R_2})^2, \quad (26)$$

où $\bar{Y}_{R_k}$ est la moyenne des Y_i dans le rectangle R_k .

Ce procédé est effectué dans chaque rectangle. Dans chacun, l'algorithme considère les 45 variables et tous les points de coupure et choisit j et s de manière à minimiser l'erreur quadratique.

Les domaines $R_1, \dots, R_m$ obtenus à la dernière étape correspondent aux feuilles de l'arbre. Il faut définir un critère pour arrêter le découpage : par exemple, un nombre minimum d'observations dans un rectangle ou une profondeur maximale pour l'arbre. C'est un hyperparamètre à calibrer par validation croisée. Nous avons considéré des profondeurs allant de 1 à 15. Les erreurs quadratiques moyennes des arbres avec profondeur optimale sont montrées dans le tableau 20.

Une fois que les feuilles de l'arbre sont bien établies, il est possible de réaliser des prédictions. Pour une valeur $x \in \mathbb{R}^{45}$, la valeur estimée de y est égal à $\bar{Y}_{R_l}$, la moyenne des Y_i tels que $(x, Y_i) \in R_l$, c'est-à-dire, la moyenne des valeurs observées Y qui se trouvent dans la feuille à laquelle x appartient. La performance prédictive des arbres est souvent moindre par rapport à celle d'autres modèles car ils ont par essence une variance élevée.

Prix des swaptions	Disponibilité modéré	Disponibilité faible	Réaliste
$p_{10,30}$	0.888	1.597	0.107
$p_{20,20}$	0.173	1.760	0.491
$p_{25,25}$	0.857	6.289	1.265
$p_{30,30}$	0.584	8.152	9.563

Table 20 Erreur de l'arbre de régression pour les prix des Swaptions

7.4 Annexe D : Forêt aléatoire

Le majeur défaut de l'arbre de régression est que sa performance est fortement dépendante de l'échantillon de données de départ. Pour lutter contre ce défaut, on peut utiliser une multitude d'arbres : une forêt d'arbres. Effectivement, un seul avis ne suffit pas, en général, pour faire une meilleure prédiction.

La forêt aléatoire (consulter [Bre01]) fonctionne sur ce même principe : plutôt que d'avoir un seul estimateur complexe capable de tout faire, elle utilise plusieurs estimateurs simples (de moins bonne qualité individuelle) avec une vision parcellaire du problème.

L'ensemble de ces estimateurs est réuni pour obtenir la vision globale du problème. C'est l'assemblage de tous ces estimateurs qui rend extrêmement performante la prédiction.

Plus précisément, les forêts aléatoires consistent à moyenner les prévisions d'arbres de décision peu corrélées construites sur une collection d'échantillons bootstrap. Pour cette raison, elle est considérée comme une méthode d'agrégation d'arbres.

Nous réalisons deux tirages aléatoires pour construire chaque arbre de la forêt, à la fois sur les variables et sur les observations :

- Tirage de B échantillons bootstrap : ensembles d'observations obtenues par tirage aléatoire uniforme avec remise.

- Au moment de réaliser un découpage dans un arbre, on tirera au hasard, préalablement, un sous-ensemble de p variables parmi les 45 variables disponibles, et le découpage optimal sera cherché seulement parmi ces p variables.

À la fin, tous les arbres de décisions sont assemblés. La prédiction donnée par la forêt aléatoire pour des données inconnues est alors la moyenne des prévisions de tous les arbres.

Parmi les caractéristiques des forêts aléatoires on note :

- Réduction de la variance en réduisant la corrélation entre les arbres et une augmentation en consécutive de la précision des prévisions
- Il peut gérer des milliers de variables explicatives sans sélection de variables.

Ses points faibles sont les suivants :

- On perd de l'interprétabilité, qui est une propriété appréciable des arbres.
- Il a tendance à donner des prédictions erratiques pour les observations hors de l'amplitude des données d'apprentissage.
- Le calcul d'un grand nombre d'arbres peut prendre plus de temps que prévu.

Nous avons choisi le nombre de variables à considérer pour les découpages, $p \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ et le nombre de arbres $m \in \{100, 200, 300, 1000\}$. L'entraînement des forêts aléatoires s'effectue avec une complexité algorithmique de $\mathcal{O}(mpdn)$, où d est le profondeur maximale des arbres construites. Les valeurs optimales ont été sélectionnées par validation croisée et les erreurs quadratiques moyennes sont montrés dans le tableau 21.

Prix des swaptions	Disponibilité modéré	Disponibilité faible	Réaliste
$p_{10,30}$	0.065	0.361	0.081
$p_{20,20}$	0.207	0.496	0.110
$p_{25,25}$	0.200	4.917	0.227
$p_{30,30}$	0.425	0.845	3.422

Table 21 Erreur de la forêt aléatoire pour le prix des swaptions

7.5 Annexe E : XGBoost

XGBoost (consulter [CG16]) est une méthode d'agrégation d'arbres comme la forêt aléatoire mais contrairement à celle-ci, le XGBoost est basé sur une procédure adaptative itérative. Cette façon de faire va la rendre plus lent mais elle va surtout permettre d'améliorer la performance à chaque étape par rapport aux exécutions précédentes.

L'algorithme XGBoost commence par construire un premier modèle et estimer nos outputs (estimer y), puis utilise les résidus de ce premier modèle comme variable cible du deuxième modèle (estimer $y - \hat{y}$) et ainsi de suite. Ainsi, pour pouvoir faire une prédiction avec un modèle XGBoost, il faut prédire les résidus de chaque modèle construit et ensuite en faire la somme. Par exemple, pour le cas de deux arbres :

$$\tilde{y} = \hat{y} + \widehat{y - \hat{y}}. \quad (27)$$

Le XGBoost est informatiquement optimisé pour rendre les différents calculs nécessaires rapides. De plus, il propose plusieurs hyperparamètres, ce qui permet d'avoir un contrôle total de l'implémentation de l'algorithme.

Nous avons considéré un taux d'apprentissage dans l'ensemble $\{0.01, 0.1, 1\}$, le nombre d'arbres dans $\{100, 200, 500\}$ et la proportion de la taille du sous-échantillon dans $\{0.5, 0.7\}$.

La complexité de l'algorithme XGBoost est linéaire en mdB où m est le nombre d'arbres, d la profondeur maximale des arbres et B est un paramètre qui permet de contrôler l'algorithme.

Les valeurs optimales des hyperparamètres ont été choisies par validation croisée et les erreurs quadratiques moyennes des modèles sont montrées dans le tableau 22.

Prix des swaptions	Disponibilité modéré	Disponibilité faible	Réaliste
$p_{10,30}$	0.119	2.891	0.090
$p_{20,20}$	0.834	2.433	0.129
$p_{25,25}$	2.437	9.090	0.707
$p_{30,30}$	11.011	9.752	14.427

Table 22 Erreurs du XGBoost pour le prix des swaptions

Nexialog Consulting est un cabinet de conseil spécialisé en Banque et en Assurance. Organisés autour de 3 domaines d'activité - Risques Bancaires, Financiers & Assurantiels - nous intervenons au sein des équipes métiers afin de les accompagner depuis le cadrage jusqu'à la mise en œuvre de leurs projets. Associant innovation et expertise, le savoir-faire de notre cabinet a permis de consolider notre positionnement sur ce segment et de bénéficier d'une croissance forte et régulière.

Les besoins de nos clients étant en constante évolution, nous nous adaptons continuellement pour proposer le meilleur accompagnement. Le département R&D de Nexialog Consulting se donne pour objectif de proposer des solutions innovantes à des problématiques métier ou d'actualité. Pour cela, nous nous appuyons sur des bibliothèques internes et sur le travail de nos consultants. Le pôle R&D Nexialog a également pour mission de former les collaborateurs sur l'évolution des techniques et la réglementation en lien avec leur activité.

Site web du cabinet : <https://www.nexialog.com>

Publications : <https://www.nexialog.com/publications-nexialog/>

Contacts

Ali BEHBAHANI
Associé, Fondateur
Tél : + 33 (0) 1 44 73 86 78
Email : abehbahani@nexialog.com

Christelle BONDOUX
Associée, Directrice commerciale
Tél : + 33 (0) 1 44 73 75 67
Email : cbondoux@nexialog.com

Adrien MISKO
Manager R&D
Email : amisko@nexialog.com

Scalnyx est un éditeur de logiciel qui développe des outils innovants basés sur le calcul intensif et l'intelligence artificielle pour les métiers des marchés de capitaux, banque et assurance.

Ces logiciels accélèrent les calculs tout en réduisant la consommation des serveurs, apportent l'explicabilité et la confiance dans les décisions d'intelligence artificielle, notamment grâce à l'IA « causale », et garantit la confidentialité des données tout en permettant leurs traitements et leur partage de façon étendue et économique.

Créée en 2019 par une équipe de PhDs, la start-up Scalnyx SAS est labélisée DeepTech.

Site web : www.scalnyx.com

Contacts

Charly BECHARA, Ph.D.
CEO
Tél : +33 (0) 6 45 32 83 70
Email : charly.bechara@scalnyx.com

Nicolas LÉVY
COO
Tél : +33 (0) 6 32 65 80 64
Email : nicolas.levy@scalnyx.com

Santiago CORTIJO, Ph.D.
Head of R&D
Tél : +33 (0) 7 85 69 28 10
Email : santiago.cortijo@scalnyx.com