Trade-off de la CVA

Ismail Bninou, Adrien Misko
Nexialog Paris

February 5, 2021

Abstract

Les banques ont souvent recours à des instruments de hedge afin de baisser le capital CVA imposé par la réglementation FRTB. La CVA et ses hedges contribuent aux fluctuations des portefeuilles de la banque et peuvent constituer une source de volatilité supplémentaire pour le P&L. L'objectif de cette étude et de mettre en évidence le Trade-off entre le capital réglementaire et la volatilité du P&L. Notre analyse a permis d'identifier les différentes sources de Trade-Off dont les corrélations entre facteurs de risque. Ces résultats sont illustrés à travers la formalisation mathématique et le calcul numérique du capital réglementaire et la volatilité du P&L dans le cas d'un portefeuille hypothétique. On conclut que l'effet sur le P&L doit être pris en compte lors de la couverture de la CVA.

1 Introduction

> "During the financial crisis, roughly two-thirds of losses attributed to Counterparty Credit Risk were due to Credit Valuation Adjustments losses and only about one-third were due to actual defaults." (BCBS) [1]

Pendant la dernière crise économique de l'année 2008, le marché financier a encouru des pertes considérables liées au risque de crédit de la contrepartie (CCR en anglais). CCR représente le risque que la contrepartie dans un contrat ne respecte pas ses obligations suite à un défaut. Le risque de contrepartie est pris en compte dans la valorisation des produits financiers afin d'aboutir à un *fair price*, c.-à-d. un prix juste, inférieur au prix risque neutre. La différence entre les deux prix est appelée *Credit Value Adjustment* (CVA). Des détails sont présentés en annexe.

La CVA avait pour habitude d'être négligée dans la pratique mais la faillite inattendue de certaines entités comme *Lehman brothers* a prouvé à la fois la nécessité de la prise en compte de la CVA dans la valorisation des produits financiers et l'importance de se couvrir (*hedger*) contre ses variations. En effet, selon le comité de Bâle, la CVA est responsable d'une grande partie de l'ensemble des pertes dans le marché financier pendant la crise économique de 2008.

En janvier 2019, les autorités bancaires ont finalisé la *Fundamental Review of Trading Book* (FRTB). Il s'agit d'une réforme de la réglementation bancaire qui entrera en vigueur à partir de 2022 (reportée à 2023 à cause de l'épidémie de la COVID-19). FRTB impose aux banques, dans la continuité de Bâle 3, de se munir d'un capital au titre des variations de la CVA suite aux fluctuations des différents facteurs de risque présents sur le marché [1]. Il s'agit du capital CVA ou CVA "prudentielle".

Par ailleurs, les normes comptables IFRS imposent une comptabilisation des instruments financiers en Juste Valeurs. Cette dernière doit prendre en compte le risque de contrepartie et ainsi une CVA "comptable".

De manière naturelle, l'objectif d'une institution financière est d'avoir un capital réglementaire au titre de la CVA le plus bas possible. En effet, ce capital est une quantité que la banque doit provisionner et ne peut être réutilisée autrement. De plus, une volatilité du P&L élevée est une source de risque majeure pour une entreprise d'où la volonté de la garder à un niveau bas. Or, les fluctuations de la CVA "comptable" dues aux mouvements de marché vont entraîner une volatilité des actifs et donc du P&L. Ainsi, dans les deux cas, il est important de créer une couverture pour réduire le risque CVA.

Une des couvertures les plus utilisées pour couvrir le risque de crédit est le CDS. Cependant, il est impossible d'obtenir une couverture minimisant à la fois la partie comptable et la partie prudentielle. On appelle cette problématique, le Trade-off de la CVA.

Dans cette étude, nous nous attacherons à mettre en évidence et formaliser la problématique de Trade-off dans le cadre de la formule standard FRTB. À notre connaissance, il n'existe pas de littérature à ce sujet au moment ou l'article a été écrit.

2 Développement de la problématique

2.1 La CVA d'un point de vue réglementaire

Vu la présence avérée du risque de contrepartie dans le marché financier, les autorités financières ont décidé d'imposer aux institutions financières de calculer une provision pour l'ensemble des produits financiers éligibles de leurs portefeuilles de négociation (*Trading Books*) et leurs portefeuilles

[1] Spreads de crédit, taux d'intérêt pour différents tenors, cours d'une action . . .

d'investissement (*Banking Books*) respectifs [3]. La provision calculée peut-être interprétée comme la pire des pertes dues aux défauts des contreparties suite aux fluctuations du marché.

Selon la réglementation, les banques ont le choix entre deux méthodes de calcul: la méthode basique et la méthode standard. Tandis que la méthode basique est plus facile à implémenter, elle surestime le risque de contrepartie et fournit un capital CVA plus important que le capital résultant de la méthode standard. Possédant les capacités logistiques nécessaires [3], les grandes banques préfèrent généralement opter pour cette dernière.

Selon le paragraphe [50.42] de la réglementation, le capital CVA est la somme des charges en capital relatives aux risques delta et aux risques vega, calculées séparément :

$$K_{reg} = K_{delta} + K_{vega}.$$

La charge en capital au titre du risque delta (resp. vega) est la somme des charges en capital au titre du risque delta (resp. vega) calculées indépendemment pour les six (resp. cinq) types de risque suivants: spreads de crédit de la contrepartie (CCS) (seulement pour le risque delta), taux d'intérêt (IR), devise (FX), spreads de crédit de référence (RCS), equity (Eq) et matières premières (Co):

$$K_{delta} = K_{delta,CCS} + K_{delta,IR} + K_{delta,FX} + K_{delta,RCS} + K_{delta,Eq} + K_{delta,Co} \tag{1}$$

et

$$K_{vega} = K_{vega,IR} + K_{vega,FX} + K_{vega,RCS} + K_{vega,Eq} + K_{vega,Co}.$$

Chaque type de risque est subdivisé en plusieurs classes de risque (*buckets*) différents, cités dans le document réglementaire [3]. Une charge (notée K_b) doit être calculée pour chaque classe de risque b. Les charges au sein du même type de risque sont agrégées à travers la formule

$$K = m_{CVA} \sqrt{\sum_b K_b^2 + \sum_{b \neq c} \gamma_{bc} S_b S_c}, \tag{2}$$

où:

- K est le capital relatif à un type de risque.
- m_{CVA} est le multiplicateur, par défaut, égal à 1 sauf que l'organisme de contrôle garde le droit d'imposer une valeur plus grande à la banque dont le risque de modèle est jugé élevé (cf. paragraphe [50.41] de la réglementation).
- γ_{bc} est la corrélation entre les classes de risque b et c, dont la valeur numérique est déterminée dans la réglementation en vigueur pour le capital CVA.
- S_b est une quantité comprise entre $-K_b$ et K_b.

Chaque classe de risque se compose elle-même de plusieurs facteurs de risque indiqués par la réglementation. Par exemple, les différents piliers d'une courbe de taux.

On note s_k^{CVA} la sensibilité, au facteur du risque k, de la somme de toutes les CVAs des produits financiers éligibles[2] dans les portefeuilles de négociation et d'investissement, pondérée par leurs nominaux respectifs.

[2] Si les conditions sont remplies, des produits financiers peuvent être regroupés au sein d'un seul *netting set*. Dans ce cas là, la CVA est calculée pour le *netting set*, permettant de réduire l'exposition et la valeur de la CVA par conséquence.

L'ensemble constitué par les CVAs des produits éligibles (ou des *netting sets*) et les hedges éligibles est appelé portefeuille CVA. Le capital CVA dépend exclusivement des sensibilités des éléments de ce portefeuille.

Le paragraphe [50.38] de la réglementation distingue deux types d'instruments pour hedger la CVA :

- Les instruments permettant de couvrir les variations du spread de crédit.
- Les instruments permettant de couvrir l'exposition de la CVA.

Un instrument de hedge doit respecter certaines conditions (cf. [50.39]) afin d'être considéré éligible. On note s_k^{Hdg} la sensibilité, au facteur de risque k, de la le somme des prix de marché des hedges du portefeuille CVA, pondérée par leurs nominaux respectifs. Pour abréger, on appelle cette somme le prix de marché du hedge.

La charge du *bucket* b est

$$K_b = \sqrt{\Big(\sum_b WS_k^2 + \sum_{k\in b}\sum_{l\in b, l\neq k} \rho_{kl} WS_k WS_l\Big) + R\sum_{k\in b}\left(WS_k^{Hdg}\right)^2}, \tag{3}$$

où:

- $WS_k = WS_k^{CVA} - WS_k^{Hdg}$.
- $WS_k^{CVA} = RW_k s_k^{CVA}$ et $WS_k^{Hdg} = RW_k s_k^{Hdg}$ où RW_k est un poids de pondération dont la valeur numérique est imposée par la réglementation.
- R est le paramètre de non-couverture fixé à $0,01$, qui empêche une couverture parfaite du risque.
- ρ_{kl} est le paramètre de corrélation entre les facteurs de risque k et l du *bucket* b.

La quantité S_b mentionnée dans 2 est définie par la formule

$$S_b = \max(-K_b, \min(\sum_{k\in b} WS_k, K_b)).$$

La réglementation définit s_k^{CVA} (resp. s_k^{Hdg}) comme le ratio entre:

- La variation de la CVA (resp. la valeur de marché du hedge) suite à une variation artificielle d'une quantité de marché liée au facteur de risque k et
- La variation de la quantité de marché en question.

On note r_k la quantité du marché liée au facteur de risque k selon la définition de la réglementation et on note Δr_k la variation de la valeur de r_k[3]. Soit $CVA(r_k)$ (resp. $H(r_k)$) la CVA (resp. le prix de marché du hedge) avec les conditions actuelles du marché. Suite à la variation de r_k, la CVA vaudra (resp. le prix de marché du hedge) $CVA(r_k + \Delta r_k)$ (resp. $H(r_k + \Delta r_k)$)[4].

On peut écrire

$$s_k^{CVA} = \frac{CVA(r_k + \Delta r_k) - CVA(r_k)}{\Delta r_k}$$

et

[3] Δr_k vaut 1 *basis point* ou 100 *basis points* d'après la réglementation

[4] Une recalibration des modèles de diffusion est nécessaire afin de calculer les nouvelles valorisations.

$$s_k^{Hdg} = \frac{H(r_k + \Delta r_k) - H(r_k)}{\Delta r_k}.$$

Par la suite, On utilisera des *Credit Default Swaps* (CDSs) pour hedger la CVA et on notera $CDS(.)$ au lieu de $H(.)$.

Enfin, la méthode SA-CVA n'impose pas l'utilisation d'un modèle stochastique de diffusion pour générer les probabilités de défaut à partir des spreads de crédit. Elle insiste néanmoins sur l'importance de la prise en compte de toute corrélation entre la qualité de crédit de la contrepartie et l'exposition. De ce fait, on fait le choix d'une modélisation stochastique des spreads de crédit.

Utilisation de l'Automatic Adjoint Differentiation

D'après les éléments ci-dessus, le calcul du capital CVA nécessite l'évaluation de toutes les sensibilités sous-jacentes. Cela demande deux évaluations de la CVA (et du prix du CDS), pour chaque facteur de risque. L'évaluation de certains produits dérivés ainsi que le calibrage de leurs modèles de *pricing* demandent un temps de calcul considérable. Vu le nombre important de facteurs de risque (plus de 25), le calcul peut être très volumineux. Suite à la demande de la part des acteurs du marché concernés, en juillet 2020, la réglementation [1] a répondu en faveur de l'utilisation d'une nouvelle méthode, l'AAD :

> Paragraphe [50.47] : [...] *Yes. A bank may use AAD and similar computational techniques to calculate CVA sensitivities under the SA-CVA if doing so is consistent with the bank's internal risk management calculations and the relevant validation standards described in the SA-CVA framework.*

Deux raisons principales rendent l'AD intéressante: La rapidité du calcul et la qualité du résultat. En effet, l'AD donne des résultats aussi précis que la différence finie, utilisée actuellement pour calculer le capital CVA. Par ailleurs, une seule évaluation du prix est suffisante pour calculer les sensibilités à tous les facteurs de risque. Pour cette raison, l'AD est plus rapide que la différence finie et selon la nature du produit financier, le gain en temps de calcul peut être considérable. Le lecteur intéressé pourra se référer à [2] pour plus de détails.

2.2 Volatilité du P&L

Pour définir la volatilité du P&L, on considère un portefeuille d'actifs dont la somme des prix risque neutre vaut V. Ces actifs dépendent de J facteurs de risque dont les I premières sont relatifs au risque de la contrepartie. On note r_i la valeur de marché liée au i-ème facteur de risque et CVA_i la valeur de la *Credit Value Adjustment* de la i-ème contrepartie. La couverture du risque de crédit i se fait à travers un instrument de hedge valant H_i et acheté en quantité N_i. $M - I$ hedges supplémentaires sont utilisés pour couvrir l'exposition.

Le valeur du portefeuille à un instant t est la somme des prix de marché de ses constituants:

$$\Pi(t) = V(t) - \sum_{i=1}^{I} CVA_i(t) + \sum_{i=1}^{M} N_i H_i(t).$$

Vu la nature des produits le plus souvent échangés dans le marché et dans un cadre *Markovien*, il est raisonnable de considérer Π, à un instant donné t, comme une fonction déterministe des facteurs de risque en t :

$$\Pi(t) = B(r_{1,t}, \dots, r_{I,t}).$$

On se place à l'instant de référence $t = 0$ et on définit le P&L du portefeuille comme la variation de sa valeur entre l'instant présent et l'instant $t = \Delta t$ proche de l'instant initial[5] [6] :

$$\begin{aligned} P\&L &= \Pi_{\Delta t} - \Pi_0 \\ &= B(r_{1,\Delta t}, \ldots, r_{J,\Delta t}) - B(r_{1,0}, \ldots, r_{J,0}). \end{aligned}$$

L'évaluation du portefeuille à l'instant Δt doit se faire sur la base de l'information disponible au marché à l'instant future Δt qui n'est pas encore disponible. Ainsi, un modèle de diffusion est nécessaire.

Après développement de Taylor, l'ordre de grandeur des termes qui comportent les dérivées secondes est relativement faible, permettant une simplification de la formule du P&L :

$$P\&L \approx \sum_{i=1}^{J} \frac{\partial B}{\partial r_i} \Delta r_i.$$

L'hypothèse de simplification ci-dessus est en accord avec la réglementation qui néglige le risque de curvature lors du calcul de la CVA.

Les fluctuations de marché du P&L sont évaluées au travers de la variance de la variation du P&L sur 10 jours pour se rapprocher de la CVA prudentielle :

$$\begin{aligned} \sigma^2_{P\&L} &= Var(P\&L) \\ &\approx Var(\sum_{i=1}^{J} \frac{\partial B}{\partial r_i} \Delta r_i) \\ &\approx \sum_{i=1}^{J} \Big(\frac{\partial B}{\partial r_i}\Big)^2 Var(\Delta r_i) + \sum_{1 \leq i \neq j \leq J} \frac{\partial B}{\partial r_i} \frac{\partial B}{\partial r_j} \rho_{ij} \sqrt{Var(\Delta r_i) Var(\Delta r_j)}, \end{aligned}$$

où ρ_{ij} est la corrélation entre Δr_i et Δr_j.

Pour pouvoir comparer la volatilité du P&L et le capital CVA, on regarde uniquement la variance du portefeuille synthétique (notée σ^2_{syn}) composé de la CVA et de ses hedges. Pour des soucis de simplicité, on pose $V_{CVA} = \sum_{i=1}^{I} CVA_i$ et $V_H = \sum_{i=1}^{i=M} N_i H_i$:

$$\begin{aligned} \sigma^2_{syn} = &\sum_{k=1}^{J} \left[\Big(\frac{\partial V_{CVA}}{\partial r_k}\Big)^2 - 2 \frac{\partial V_{CVA}}{\partial r_k} \frac{\partial V_H}{\partial r_k} + \Big(\frac{\partial V_H}{\partial r_k}\Big)^2 \right] Var(\Delta r_k) \\ &+ \sum_{1 \leq k \neq l \leq J}^{J} \left[\frac{\partial V_{CVA}}{\partial r_k} \frac{\partial V_{CVA}}{\partial r_l} - 2 \frac{\partial V_{CVA}}{\partial r_k} \frac{\partial V_H}{\partial r_l} + \frac{\partial V_H}{\partial r_k} \frac{\partial V_H}{\partial r_l} \right] \sqrt{Var(\Delta r_k) Var(\Delta r_l)} \rho_{kl} \end{aligned}$$

2.3 Sur la problématique de Trade-off

Afin de bien assimiler la problématique de Trade-off, il faut regarder de près les formules du capital CVA et de la variance du P&L. La comparaison des deux approches réglementaire et comptable permet de dégager quelques ressemblances et plusieurs disparités que l'on cite ci-après.

Le capital réglementaire K_{reg} est la somme de K_{delta} et K_{vega} préalablement définis. Pour simplifier l'étude, on s'intéresse exclusivement au risque delta. Les mécanismes de calcul du risque

[5] Cette hypothèse permet de négliger la valeur temps et donc niveler le facteur d'actualisation.

[6] La fonction B change en fonction de l'instant d'évaluation du portefeuille mais on peut la considérer invariante entre $t = 0$ et $t = \Delta t$ tant que qu'aucun flux financier n'aura lieu entre les deux instants.

vega sont identiques aux mécanismes du risque delta et le rôle ce cette simplification est d'éviter de complexifier inutilement le formalisme mathématique du problème sans apporter un aspect supplémentaire du Trade-off.

D'après les formules 2 et 3, K_{delta} est une fonction

- des sensibilités s_k^{CVA} (resp. s_k^{Hdg}) de la CVA (resp. des hedges) du portefeuille global aux facteurs de risque,
- des poids RW_k, des corrélations ρ_{kl} entre les facteurs de risque et des corrélations γ_{bc} entre les *buckets*.

Par ailleurs, la variance du P&L est une fonction

- des dérivés $\frac{\partial V_{CVA}}{\partial r_k}$ (resp. $\frac{\partial V_H}{\partial r_k}$) de la CVA (resp. des hedges) du portefeuille synthétique aux facteurs de risque,
- des quantités $Var\Delta r_k$ et des corrélations ρ_{kl} entre les facteurs de risque.

Prise en compte différente des corrélations entre les différents facteurs de risque D'après l'équation 1, le capital K_{delta}[7] est la somme des capitaux suivant chaque type de risque[8]. Cette agrégation par la somme est la conséquence de l'hypothèse implicite d'une corrélation parfaite entre les différents types de risque. Comme expliqué dans 2.1, l'ensemble des facteurs de risque est subdivisé en *buckets* et chaque type de risque se constitue de plusieurs *buckets*. Dans le calcul réglementaire, les *buckets* appartenant au même type de risque sont corrélés à travers les quantités γ_{bc} et les facteurs de risque regroupés dans le même *bucket* sont corrélés à travers les quantités ρ_{kl}. Par contre, d'un point de vue comptable, tous les facteurs de risque sont corrélés. cela constitue une source de Trade-off.

Poids attribués aux sensibilités/dérivées Dans cette étude, on considère que les dérivés du P&L sont estimées par des sensibilités calculées à l'instar des sensibilités réglementaires et désormais, on unifie leurs notations.
On constate d'après les formules que la quantité $\sqrt{Var(\Delta r_k)}$ et RW_k jouent le même rôle, cependant, ce dernier est à valeur fixe déterminée par la réglementation alors que la quantité $\sqrt{Var(\Delta r_k)}$ est estimée numériquement via la méthode de *Monte Carlo*. Vu le caractère conservateur de la réglementation, on s'attend à ce que les quantités RW_k soient plus grandes. En effet, la réglementation s'appuie sur l'hypothèse d'une loi paramétrique alors que l'on dispose d'une liberté de modélisation au niveau comptable plus élevée. Enfin, les corrélations entre facteurs de risque sont fixes et imposés par le régulateur alors que les entités peuvent estimer cette dernière plus finement et régulièrement pour la partie comptable.

La réglementation interdit le hedge parfait de la CVA Bien que la contribution soit minime cette fois-ci, le terme supplémentaire présent dans la formule 3 afin d'empêcher un hedge parfait dans le capital CVA est aussi une source de Trade-off. En effet, le hedge parfait est autorisé d'un point de vue comptable.

Les différences des manières de calcul rendent impossible la minimisation du capital réglementaire et de la variance du portefeuille synthétique avec les mêmes instruments de hedge et les mêmes quantités de hedge. Le traitement du Trade-off pourrait s'articuler autour d'un problème d'optimisation multiobjectif : Minimiser le capital CVA tout en gardant une variance inférieure à un seuil prédéfini.

[7] Noté simplement K par la suite.
[8] Taux d'intérêt, spreads de crédit ...

3 Illustration du Trade-off : Cas d'un portefeuille hypothétique simple

Le rôle de cette partie est d'illustrer la problématique de Trade-off à travers un cas pratique permettant de mettre en exergue ses différentes sources sans pour autant rendre la formalisation mathématique fastidieuse.

On construit un portefeuille composé d'un Swap de taux S[9] dont le risque de crédit est couvert avec un CDS de nominal N.

La contrepartie du swap est une autorité locale avec un *rating investment grade* (IG). Notre portefeuille est sensible aux deux types de risque IR et CCR à travers les 3 facteurs de risque suivants :

1. r_{1Y} la valeur de la courbe de taux à maturité 1 an.
2. c_{6m} (resp. c_{1Y}) la valeur du spread de crédit à maturité 6 mois (resp. 1 an.).

Dans notre modèle, la CVA est sensible aux taux d'intérêt à travers l'exposition et aux spreads de crédit à travers les probabilités de défaut. On suppose que le CDS est sensible aux spreads de crédit uniquement vu la durée de vie courte du swap de taux.

Notre objectif est d'optimiser les quantités définies ci-dessus en fonction du nominal du CDS. Pour ce, on commence par exprimer le capital CVA en fonction de N. On sait que

$$K = K_{delta,CCS} + K_{delta,IR}.$$

Puisque le CDS n'est pas sensible aux taux $K_{delta,CCS}$ est la partie du capital dépendante de N :

$$\begin{aligned}(K_{delta,CCS})^2 =& (RW_{c_{6m}})^2(s^{CVA}_{c_{6m}} - Ns^{CDS}_{c_{6m}})^2 + (RW_{c_{1Y}})^2(s^{CVA}_{c_{1Y}} - Ns^{CDS}_{c_{1Y}})^2 \\ &+ 2 \times 0.9 RW_{c_{6m}} RW_{c_{1Y}}(s^{CVA}_{c_{6m}} - Ns^{CDS}_{c_{6m}})(s^{CVA}_{c_{1Y}} - Ns^{CDS}_{c_{1Y}}) \\ &+ 0.01N^2\Big((RW_{c_{6m}} s^{CDS}_{c_{6m}})^2 + (RW_{c_{1Y}} s^{CDS}_{c_{1Y}})^2\Big)\end{aligned}$$

et

$$K_{delta,IR} = RW_{r_{1Y}} |s^{CVA}_{r_{1Y}}|$$

Par ailleurs, la variance du P&L s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned}\sigma^2_{syn} =& \sigma^2_{syn,CCS} + \sigma^2_{syn,IR} \\ &+ 2 \times \rho_{c_{6m},r_{1Y}} \sqrt{Var(\Delta c_{6m}) Var(\Delta r_{1Y})}(s^{CVA}_{c_{6m}} - Ns^{CDS}_{c_{6m}})s^{CVA}_{r_{1Y}} \\ &+ 2 \times \rho_{c_{1Y},r_{1Y}} \sqrt{Var(\Delta c_{1Y}) Var(\Delta r_{1Y})}(s^{CVA}_{c_{6m}} - Ns^{CDS}_{c_{6m}})s^{CVA}_{r_{1Y}}\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\sigma^2_{syn,CCS} =& Var(\Delta c_{6m})(s^{CVA}_{c_{6m}} - Ns^{CDS}_{c_{6m}})^2 + Var(\Delta c_{1Y})(s^{CVA}_{c_{1Y}} - Ns^{CDS}_{c_{1Y}})^2 \\ &+ 2 \times \rho_{c_{6m},c_{1Y}} \sqrt{Var(\Delta c_{6m}) Var(\Delta c_{1Y})}(s^{CVA}_{c_{6m}} - Ns^{CDS}_{c_{6m}})(s^{CVA}_{c_{1Y}} - Ns^{CDS}_{c_{1Y}}).\end{aligned}$$

[9] Un swap d'une maturité d'un an permet de calculer un capital conforme à la réglementation sans complexifier inutilement le calcul.

et

$$\sigma^2_{syn,IR} = Var(\Delta r_{1Y})(s^{CVA}_{r_{1Y}})^2.$$

$\rho_{x,y}$ est une corrélation entre le facteur de risque x et le facteur de risque y.

Les formules ci-dessous permettent d'établir une analogie entre $K_{delta,CCS}$ et $\sigma_{syn,CCS}$ d'un côté, et entre $K_{delta,IR}$ et $\sigma_{syn,IR}$ d'un autre côté. Cette analogie met la lumière sur les différents éléments de Trade-off mentionnés dans le paragraphe 2.3.

Résultats numériques

Dans cette partie, on présente les résultats numériques des développements mathématiques présentés dans la partie précédente. Les applications numériques ont été faites avec un nominal d'un million.

On regarde ici l'effet de corrélation entre les taux d'intérêt et les spreads de crédit sur la problématique de Trade-off. Pour cela, on fixe la valeur de la corrélation entre les spreads de crédit à 6 mois et les spreads de crédit à 1 an à 0.9. D'autre part on suppose, en concordance avec la réglementation, que $\rho_{c_{6m},r_{1Y}} = \rho_{c_{1Y},r_{1Y}}$

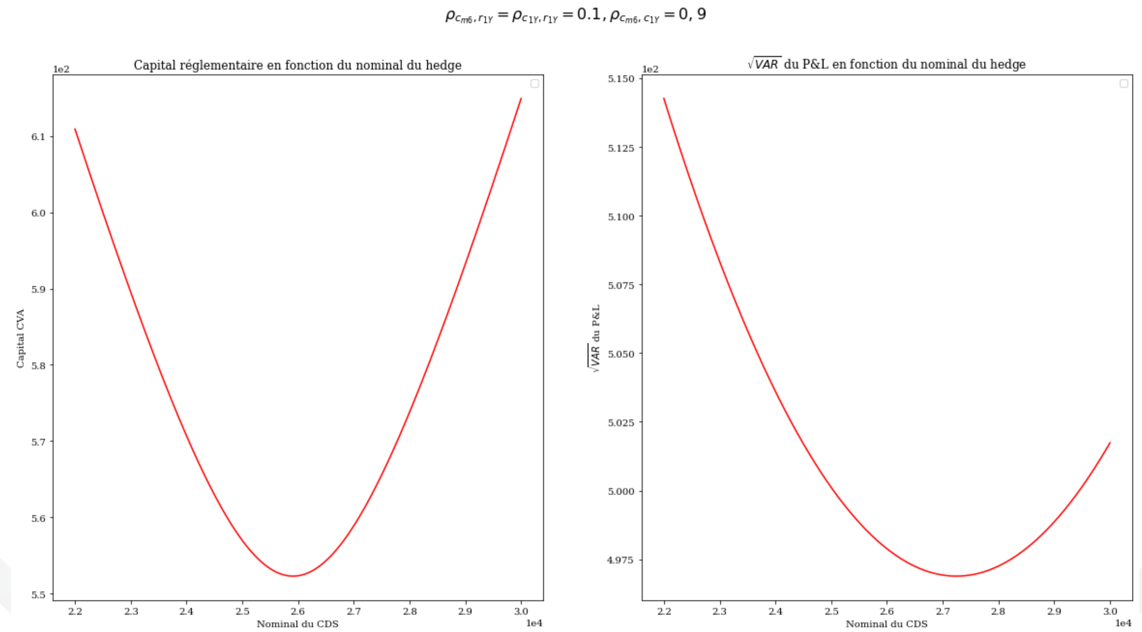

Figure 1 Courbe du capital réglementaire (à gauche) et de la racine de la variance du P&L (à gauche), en fonction du nominal du CDS. Cas d'une corrélation positive entre les taux d'intérêt et les spreads de CDS.

On s'aperçoit que lorsque les taux d'intérêt et les spreads de crédit sont positivement corrélés, le montant nécessaire pour minimiser le capital réglementaire n'est pas suffisant pour minimiser la variance du P&L.

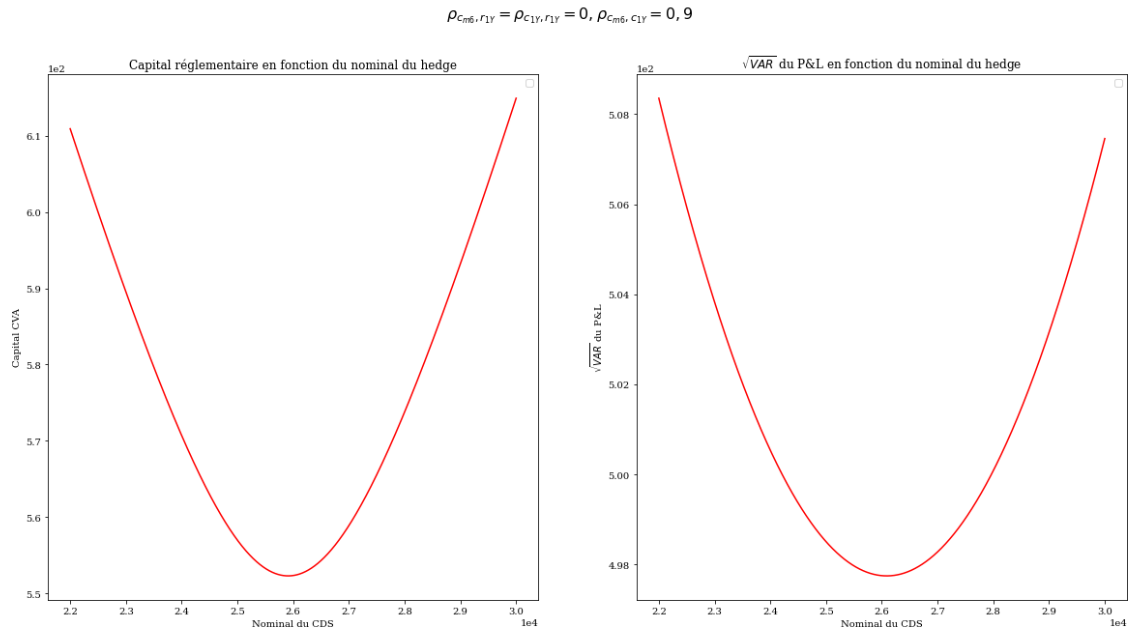

Figure 2 Courbe du capital réglementaire (à gauche) et de la racine de la variance du P&L (à gauche), en fonction du nominal du CDS. Cas d'une absence de corrélation entre les taux d'intérêt et les spreads de CDS.

D'après la figure ci-dessus, lorsque les taux d'intérêt et les spreads de crédit sont dé-corrélés, le montant nécessaire pour minimiser le capital réglementaire est proche du montant nécessaire pour minimiser la variance du P&L. La persistance d'un effet Trade-off est dû au fait que la réglementation empêche un hedge parfait du capital CVA.

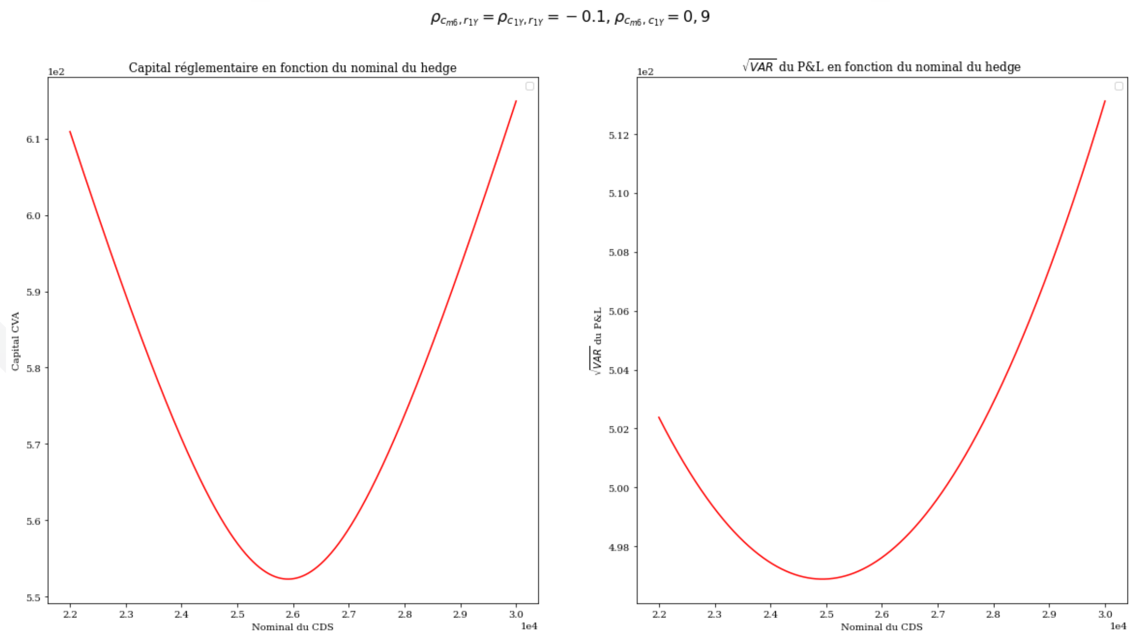

Figure 3 Courbe du capital réglementaire (à gauche) et de la racine de la variance du P&L (à gauche), en fonction du nominal du CDS. Cas d'une corrélation négative entre les taux d'intérêt et les spreads de CDS.

D'après la figure ci-dessus, lorsque les taux d'intérêt et les spreads de crédit sont négativement corrélés, le montant nécessaire pour minimiser le capital réglementaire mène à une sur-couverture de la variance du P&L.

Dans les trois cas de corrélation entre les les taux d'intérêt et les spreads de crédit, on remarque que le capital réglementaire est toujours plus grand que la volatilité du P&L, cela est dû à l'hypothèse d'une corrélation parfaite entre les deux types de risque au niveau du capital réglementaire.

4 Conclusion

À travers cette étude, nous avons pu mettre en évidence la problématique de Trade-off entre le capital réglementaire de la CVA calculé à travers la méthode standard et la volatilité du P&L du portefeuille CVA. La procédure de calcul du capital CVA emploie des hypothèses qui créent des décalages avec la manière dont la volatilité du P&L est calculée. Parmi ces hypothèses : le choix d'une corrélation parfaite entre les différents types de risque et l'impossibilité d'un hedge parfait de la CVA.

D'autre part, Le calcul de la volatilité du P&L emploie la valeur de la corrélation entre chaque paire de facteurs de risque, estimée à travers les données du marché. Par contraste, d'un point de vue réglementaire, la prise en compte de corrélation est mise en oeuvre entre chaque paire de facteurs appartenant à la même classe de risque et ensuite entre les classes de risque appartenant au même type de risque. Nous avons constaté qu'il s'agit de la source principale de Trade-off.

La détermination d'une fonction objectif selon le besoin de l'entreprise permettra de choisir les instruments de couverture convenables mais surtout les quantités de couverture idéales.

5 Annexes

Swap de taux

Le Swap de taux est un échange périodique de taux entre deux contreparties, le taux variable L (Euribor par exemple) contre le strike K. Le graphe 4 résume les Cash Flow d'un Swap.

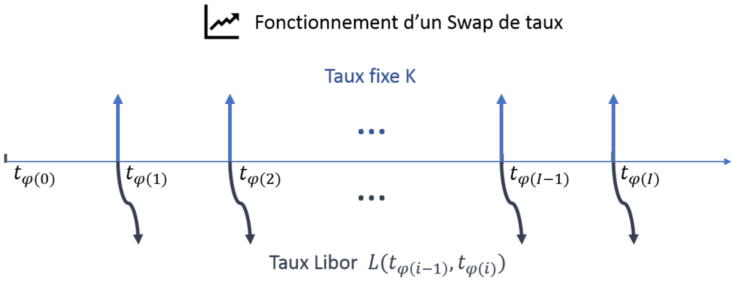

Figure 4 Cash Flow d'un Swap.

Soit $I > 0$ et ϕ une application de $[0, I] \cap \mathbb{N}$ dans $[0, N_t] \cap \mathbb{N}$ telle que la suite $\phi(i)_{0 \leq i \leq I}$ est strictement croissante avec $\phi(0) = 0$ et $\phi(I) = N_t$.

On note $L(t_{\phi(i-1)}, t_{\phi(i)})$ le taux Euribor entre les instants $t_{\phi(i-1)}$ et $t_{\phi(i)}$ et $D(0, t_{\phi(i)})$ le discount factor par au temps $t_{\phi(i)}$.

Soit un Swap payeur qui consiste à recevoir en chaque instant $t_\phi(i)$ $(i > 0)$ un Cash Flow de $L(t_{\phi(i-1)}, t_{\phi(i)}) - K$ (ce Cash Flow peut être négatif).

La valeur de ce Swap est

$$\mathbb{E}[P((r_{t_i})_{0 \leq i \leq N_t}, \theta)] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{I} D(0, t_{\phi(i)})(L(t_{\phi(i-1)}, t_{\phi(i)}) - K)].$$

La valeur du Swap peut aussi s'exprimer en fonction du taux Swap et le strike K.

Modèle de probabilité de défaut

La réglementation de la CVA impose l'utilisation des spreads de crédit, lorsque disponible, pour générer les probabilités de défaut de la contrepartie. Pour ce, la courbe des spreads déduite des prix de marché des CDS est exploitée. En cas d'illiquidité des CDS de la contrepartie en question, l'utilisation de la courbe de spread d'une autre contrepartie appartenant au même triplet (rating, industrie, région) est possible.

Pour tout $t \geq 0$, la probabilité de défaut entre les instants 0 et t est

$$pd_t = \mathbb{P}(0 \leq \tau \leq t) = 1 - \mathbb{E}[\exp(-\int_0^t \lambda(u)du)],$$

avec λ le processus stochastique de l'intensité de défaut calibrée à l'aide de la courbe de spreads [4].

Credit Value Adjustment

La CVA peut être définie comme l'espérance des pertes dans un portefeuille de transactions en cas de défaut de la contrepartie.

Afin de définir la CVA de manière plus rigoureuse, on note τ la variable aléatoire définissant le temps de défaut de la contrepartie. On suppose que les transactions s'étendent de l'instant 0 à l'instant T et on désigne par $V_c(t)$ la valeur de continuation de l'ensemble des contrats avec la contrepartie, c'est à dire la valeur de tous les flux de trésorerie (cashflow) futurs, actualisé à l'instant t.

Soit $0 \leq LGD \leq 1$ la perte encouru en cas de défaut (Lost Given Default). La valeur de la CVA au temps t, notée CVA_t, est définie par:

$$CVA_t = LGD\mathbb{E}[\mathbf{1}_{0\leq\tau\leq T}D(0,\tau)E(\tau)|\mathcal{F}_t],$$

où $E(t) = max(V_c(t), 0)$ est l'exposition à l'instant t. $D(0,t)$ est le discount factor entre les instants 0 et t. $\mathcal{F}_t$ est l'information disponible à l'instant t.

Credit Default Swap

Le Credit Default Swap (CDS) est un produit financier de crédit permettant à son acheteur de se couvrir contre le défaut d'un émetteur.

L'acheteur de protection paye périodiquement une quantité S appelée spread du CDS, déterminée en amont. En cas d'événement de crédit, l'acheteur cesse les payements et reçoit un remboursement de la part du vendeur égal à $R = 1 - LGD$. On utilise la variable aléatoire τ afin de modéliser le défaut.

Considérons un CDS entre les instants t_0 et t_n. L'acheteur du CDS paie le spread en chaque instant $t_i, i > 0$ sauf si le défaut a lieu en t_i ou en amont.

Si les paiements sont ponctuelles (en t_i) et les taux et les probabilités de défaut sont dé-corrélés, le spread de CDS S'exprime par

$$S = \frac{R\sum_{i>1} P_{t_i}(pd_{t_i} - pd_{t_{i-1}})}{\sum_{i>1} P_{t_i}(1 - pd_{t_i})},$$

où $P_t = \mathbb{E}[D(0,t)]$.

References

[1] https://www.bis.org/bcbs/publ/d507.pdf

[2] MISKO, Adrien, BNINOU, Ismail. Estimation des sensibilités de la CVA par Adjoint Différentiation. Nexialog Consulting, 2019.

[3] Targeted revisions to the credit valuation adjustment risk framework, July 2020.

[4] SEBBAR, Ouassim. Construction d'un générateur de scénarios économiques. Nexialog Consulting, 2019.