

INCERTITUDE DE MODELE ET ARBRE BINOMIAL

EVALUATION D'UNE OPTION EUROPEENNE

amisko@nexialog.com

Décembre 2018

Abstract : Cet article vise à élargir le pricing d'option par arbre binomial en prenant en compte le risque d'incertitude du modèle. En effet, dans le modèle CRR (Cox Ross Rubinstein), le taux sans risque et la volatilité sont considérés constants et connus. Ces deux hypothèses, largement reconnues comme fausses, sont sources d'écart entre théorie et réalité. A titre d'exemple, nous pouvons souligner les changements du taux sans risque sur des cycles économiques différents ou les fluctuations à court terme de la volatilité.

I NOTATION

- ✚ σ : Volatilité du sous-jacent
- ✚ T: Pas temporel de discrétisation
- ✚ S_t : Valeur du sous-jacent à la date t
- ✚ R_F : Le taux d'actualisation supposé constant et considéré comme le taux sans risque
- ✚ C : Payoff d'un Call

II ANALYSE DU PROBLEME

II.a Définition du risque de modèle

Cet article s'inscrit dans le cadre général de la réglementation TRIM¹ et de la gestion du risque de modèle. Nous pouvons définir celui-ci comme l'ensemble des risques auxquels s'expose une institution financière dont la gestion du risque repose sur des modèles mathématiques. Une des composantes du risque de modèle est la mauvaise estimation des paramètres. Ceci pouvant conduire à un mauvais calcul de P&L ou à une couverture imparfaite. Ainsi, gérer ce risque impose de pouvoir quantifier son impact sur le prix des actifs en portefeuille. Dans cette note, nous étudions l'impact d'un mauvais choix des paramètres sur le prix d'une option.

¹ Targeted Review of Internal Models : Projet de la BCE visant à renforcer la comparabilité des modèles internes.

Le risque de modèle peut se quantifier, entre autre, par :

$$RM = \frac{Sup(R_i) - R_{ref}}{Sup(R_i) - Inf(R_i)}$$

Où R_i est une mesure de risque particulière (VaR, ES, ...) calculé sous l'hypothèse du modèle i et R_{ref} , la mesure de référence retenue utilisée dans les reportings.

Pour fixer les idées, nous pouvons imaginer une VaR paramétrique σZ_α^2 . Supposons que l'estimation de σ entraîne une incertitude de 2% (bruit de mesure, optimisation imparfaite,...). Nous avons alors le choix d'être conservateur et de prendre pour modèle de référence $\sigma_m = \sigma_{max}$ et ainsi avoir un **RM** nul. Mais nous pouvons aussi prendre la valeur moyenne ce qui donnerait un **RM** à 50%³. Par conséquent, l'indicateur RM permet de mesurer, entre 0 et 1, l'écart entre le modèle retenu et la mesure de risque la plus conservatrice, choisie par rapport aux différentes combinaisons possibles des données d'entrée.

II.b Contexte

L'idée est de repartir du modèle CRR mais en considérant une incertitude sur le paramètre de volatilité et en considérant plusieurs valeurs discrètes pour le taux sans risque. Nous continuerons par contre de supposer la volatilité constante ; biais pouvant être corrigé en réajustant régulièrement le modèle.

Ainsi, nous définissons ρ comme le rayon relatif de l'intervalle de confiance à 95% obtenu suite à une estimation $\bar{\sigma}$ du paramètre de volatilité :

$$p(\sigma \in \Theta) = 95\% \text{ avec } \Theta = [\bar{\sigma} - \rho * \bar{\sigma}, \bar{\sigma} + \rho * \bar{\sigma}].$$

Dans la suite de cet article, nous chercherons à évaluer l'option en supposant que la volatilité « réelle » de notre sous-jacent est contenue dans l'intervalle Θ . Ainsi, l'option est évalué non plus à partir d'une unique valeur de σ mais à partir d'un ensemble continue de valeurs.

De plus, nous considérons le taux sans risque R_f comme pouvant prendre chacune des 3 valeurs suivantes $\{R_l, R_m, R_h\}$ avec $R_l < R_m < R_h$, ceci pour prendre en compte l'incertitude sur les taux sans risques. Nous pouvons considérer un ensemble discret composé des valeurs extrêmes (valeur minimum estimé du taux sans risque, valeur moyenne et valeur maximum) et non une structure par terme. La généralisation aux structures par terme ne change en rien l'objet de l'étude.

² Z_α : Quantile d'une loi normal de degré de confiance α

³ $RM = \frac{1.1-1}{1.1-0.9}$

II.c Modèle CRR généralisé

Dans cette section, nous rappelons brièvement le modèle CRR d'après l'article [1]. Nous renvoyons le lecteur à cette référence pour tout complément.

En finance, le modèle binomial (ou modèle CRR du nom de ses auteurs) fournit une méthode numérique pour l'évaluation des options. Il a été proposé pour la première fois par Cox, Ross et Rubinstein (1979). Il s'agit d'un modèle décrivant la dynamique du sous-jacent en temps discret à l'aide d'un arbre recombinaison.

Le processus d'évaluation est itératif. On part du nœud final de chaque branche et ensuite on « remonte » jusqu'au premier nœud (date d'évaluation), où le résultat du calcul est la valeur de l'option.

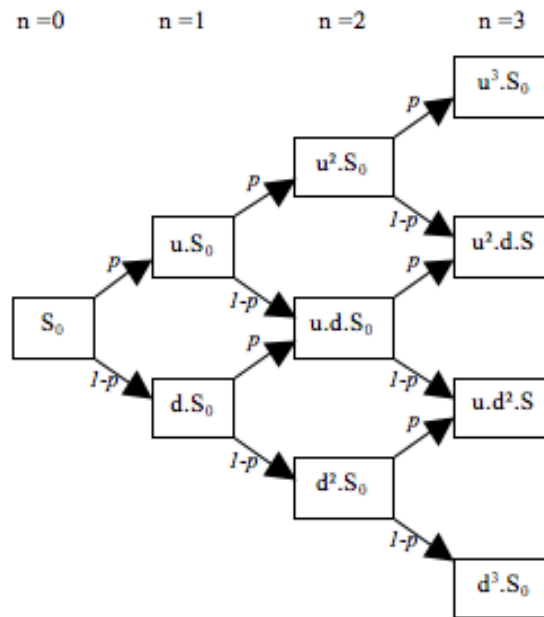
Cette méthode utilise donc le processus suivant :

1. création de l'arbre,
2. calcul de la valeur de l'option au nœud final de chaque branche, donné par la valeur de son payoff,
3. calcul progressif de la valeur de l'option à partir du nœud précédent, la valeur du premier nœud étant la valeur de l'option à la date initiale.

Pour construire l'arbre, on considère qu'à chaque étape, la valeur du sous-jacent S a une probabilité p d'augmenter pour devenir uS (mouvement « up ») et une probabilité $(1-p)$ de diminuer pour devenir dS (mouvement « down »). Une fois l'arbre construit, on calcule la valeur de l'option à maturité.

Par exemple, dans le cas d'une option sur une action sans dividende, les paramètres correspondants à la probabilité risque-neutre sont :

$$p = \frac{e^{R_f T} - d}{u - d}, \quad u = e^{\sigma \sqrt{T}}, \quad d = \frac{1}{u}$$



On trouve que S suit une loi binomiale et, en absence d'opportunité d'arbitrage, le prix d'un Call européen sur S de strike K et de maturité nT est donné par formule suivante :

$$C = e^{-R_f nT} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} (u^k d^{n-k} S_0 - K)^+$$

II.d Traitement de l'incertitude

Comme énoncé précédemment, le risque de modèle découle de l'incertitude sur les paramètres R_f (possiblement égal à R_l , R_m ou R_h) et σ nécessaires au calcul de p , u et d .

Dans cet article, l'incertitude sur les paramètres du modèle est traitée à l'aide de la logique floue. Notons ici que l'on parle bien de bien de *possibilité* et non de *probabilité*. Par exemple, R_f n'est pas supposé aléatoire ; i.e. admettant une distribution de probabilité connue ; mais incertain par manque d'information, celui du cycle économique.

Remarque :

Pour clarifier ce concept de théorie des possibilités, notons que les probabilités servent à répondre à la phrase « Nous sommes peut-être en récession » tandis que les possibilités regarderont le degré de vérité de l'énoncé « Nous sommes presque en récession ». En effet, la théorie des probabilités aide à inférer sur le fait d'appartenir ou pas à un ensemble mais ne permet pas de prendre en compte l'imprécision liée à la définition de cet ensemble (i.e., que veut dire exactement être en récession ?). Par exemple, si je fais dépendre le modèle de volatilité du cycle économique, nous prenons un risque sur le fait de ne pas savoir exactement si l'on est en récession ou pas. Enfin, il est intéressant de noter que la possibilité d'appartenir à un ensemble et à son complémentaire n'est pas nulle ; comme elle le serait pour les probabilités ; mais est comprise entre $[0,0.5]$. Pour plus de renseignement, vous pouvez consulter la référence [4].

Dans cet article, nous présentons une utilisation assez simple de la logique floue basée sur les valeurs extrêmes des combinaisons possibles des variables d'entrée.

Nous prenons trois scénarii pour la volatilité :

Suh: mouvement up plus important, $Suh = S_0 \cdot e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{T}} = u_h S_0$

Sum: mouvement up medium, $Sum = S_0 \cdot e^{\sigma\sqrt{T}} = u_m S_0$

Sul: mouvement up moins important, $Sul = S_0 e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{T}} = u_l S_0$

Sdl: mouvement down moins important, $Sdl = S_0 \cdot e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{T}} = d_l S_0$

Sdm: mouvement down medium, $Sdm = S_0 \cdot e^{-\sigma\sqrt{T}} = d_m S_0$

Sdh: mouvement down plus important, $Sdh = S_0 \cdot e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{T}} = d_h S_0$

De plus, du fait de trois valeurs pour le taux sans risques, nous avons trois probabilités « up ».

La récurrence de notre CRR s'effectue sur les valeurs extrêmes de notre option et sur la valeur medium. Nous avons alors trois arbres binomiaux que l'on peut représenter par un seul arbre où chacun des nœuds représente un triplet (Cl, Cm, Ch).

$Ch = e^{-R_h T} [P_h C_{uh} + (1 - P_h) C_{dh}]$ avec le couple de paramètre $(R_h ; (1 + \rho)\sigma)$;

$Cm = e^{-R_m T} [P_m C_{um} + (1 - P_m) C_{dm}]$ avec le couple de paramètre $(R_m ; \sigma)$;

$C_l = e^{-R_1 T} [P_l C_{ul} + (1 - P_l) C_{dl}]$ avec le couple de paramètre $(R_1 ; (1 - \rho)\sigma)$.

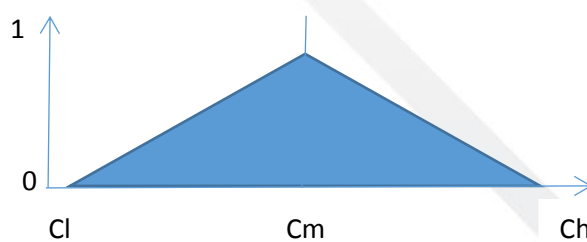
Avec :

- $C_l < C_m < C_h$ par construction
- $P_h = \frac{e^{R_h T} - d_h}{u_h - d_h}$
- $P_m = \frac{e^{R_m T} - d_m}{u_m - d_m}$
- $P_l = \frac{e^{R_l T} - d_l}{u_l - d_l}$

De même, nous pouvons étendre ce raisonnement au cas du Put avec :

- **Ph** : prix du Put le plus élevé évalué à travers la probabilité P_l et la volatilité $(1 + \rho)\sigma$;
- **Pm** : prix du Put de référence évalué avec la probabilité P_m et la volatilité σ ;
- **Pl** : prix du Put le moins élevé évalué avec la probabilité P_h et la volatilité $(1 - \rho)\sigma$.

Enfin, il nous reste à agréger le triplet du nœud initial (t=0) afin d'obtenir un prix unique. Le choix final se fait à dire d'expert en fonction de notre modèle flou et de la possibilité de chacune des combinaisons. Nous renvoyons le lecteur à l'article [3] pour plus d'information. Par simplicité, nous avons retenu l'approche Best Nonfuzzy Performance qui correspond au centre de gravité des possibilités. De plus, nous avons choisi le modèle flou ci-dessous représenté par un triangle.



$$C_{ref} = \frac{\int x \mu_x dx}{\int \mu_x dx} = C_l + \frac{[(C_h - C_l) + (C_m - C_l)]}{3} = \frac{C_l}{3} + \frac{C_h}{3} + \frac{C_m}{3} \text{ (avec } \mu_x \text{ support du triangle).}$$

Pour information, l'article [3] choisit de prendre l'espérance sur les possibilités pour l'agrégation :

$$C_{ref} = E(y) = \int y f_y dy = \frac{C_l}{6} + \frac{C_h}{6} + \frac{2 * C_m}{3}.$$

Ce choix a pour effet de centrer davantage les résultats autour du scénario moyen.

Nous aurions aussi pu prendre une autre figure pour agréger les données, comme un quadrilatère par exemple, avec C_{ml} et C_{mh} à définir.



Pour conclure, nous avons établi un prix pour une option qui prend en compte l'erreur de mesure de la volatilité et du taux sans risque à partir de critères subjectifs. Plus important encore, nous pouvons trouver un intervalle de valeurs possibles. Toutes les options du marché ayant un prix supérieur seront jugées trop chères et toutes les options inférieures à la borne minimum seront jugées bon-marchés. De manière générale, l'arbre flou revient à pricer N arbres suivant les combinaisons possibles de nos données d'entrée et de les agréger suivant la possibilité de chacun des scénarii.

III APPLICATION NUMERIQUE

L'intégralité de l'application numérique est disponible sur demande.

Nous prenons l'exemple d'une option européenne sur CAC 40 de maturité 3 ans. De plus, nous prendrons l'Euribor 1 an comme taux sans risque. Enfin l'ensemble des données a été récupéré de Bloomberg.

III.a Mesure des taux sans risques

Pour définir les valeurs possibles de R_h et R_l , nous allons regarder quels sont les extrema sur un cycle économique. Nous allons nous baser sur une fenêtre entre 2008 et 2018.

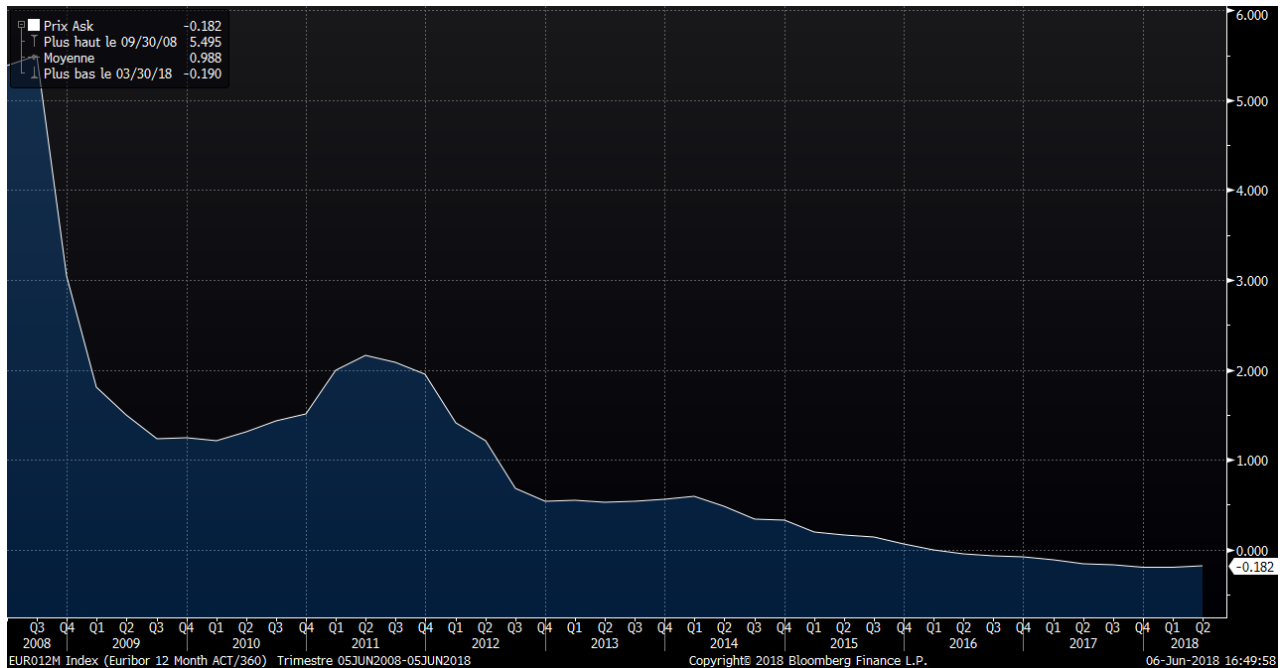


Figure 1 : Euribor 1 an entre 2008 et 2018

Pour éviter de trop biaiser notre étude sur des valeurs trop anciennes, nous allons accorder des poids w_i en fonction de la date d'observation pour trouver les extrema. A noter que les rendements correspondront cependant aux valeurs observées (non pénalisées).

$$w_i = \frac{a^i(1 - a)}{1 - a^N}$$

Le poids le plus récent étant en $i=0$ et N représentant le nombre d'observation entre 2008 et 2018. Plus a est faible et plus les anciennes valeurs seront pénalisées.

Les 10 premières valeurs de w_i pour $a=0.9$ sont [0.1, 0.09, 0.08, 0.07, 0.07, 0.06, 0.05, 0.05, 0.04, 0.04]

Remarque : w_i constituant une suite géométrique, on peut noter que la somme est bien égale à 1

A travers ce procédé, nous trouvons $(R_l, R_h) = (-0.19\%, 1.95\%)$.

Enfin R_m sera la valeur du taux sans risque espéré du modèle de référence. Nous observons en septembre 14 bps.

Notons que l'écart entre le modèle flou et un arbre CRR classique sera d'autant plus important que les écarts entre R_h et R_m et entre R_m et R_l seront grands. Par contre, la dynamique des résultats ne changera pas.

III.b Mesure de l'intervalle des valeurs possibles de la volatilité

Pour estimer la volatilité et rho, nous regardons l'amplitude possible des valeurs au cours d'une journée de la volatilité implicite des deux derniers jours. Ceci afin de quantifier le risque lié à une calibration journalière.



Figure 2 : Volatilité implicite entre 2008 et 2018

En prenant la dernière valeur disponible et l'amplitude divisée par deux fois la dernière valeur estimée, nous pouvons avoir une première approximation de rho.

A travers ce procédé, nous trouvons $(\sigma, \rho) = (13.9\%, 8\%)$.

A noter que nous négligeons ici l'écart entre la volatilité implicite d'un Call et d'un Put (hypothèse fautive dans la pratique mais n'impactant pas notre étude qui est une comparaison entre deux méthodes).

Enfin, ρ est un facteur important de l'amplitude de l'écart entre le modèle flou et un CRR classique. La raison principale est que ce facteur contrôle l'amplitude des valeurs possibles du sous-jacent à la maturité. Ainsi, des valeurs élevées de ρ se traduiront par un risque de modèle plus élevé.

III.c Comparaison des résultats sur le prix d'une option

Pour comprendre l'impact de cette méthode, nous comparons le prix d'une « fuzzy » option à celui d'une option européenne traditionnelle pour différentes valeurs de K/S_0 . Les résultats sont obtenus avec 201 nœuds et représentent l'écart relatif de la valeur floue par rapport à une valeur classique représentée par C_m (détails en annexe).

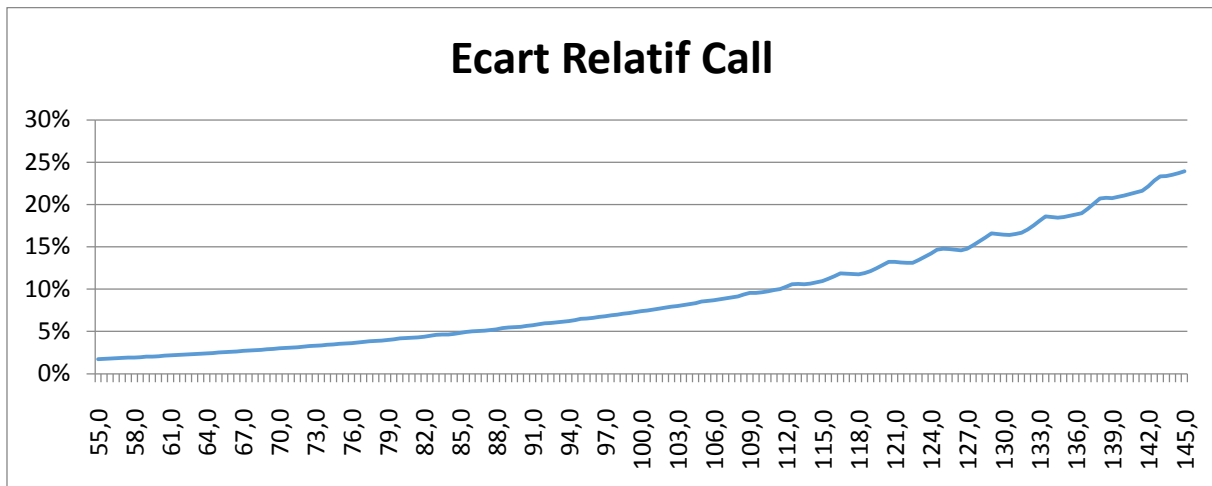


Figure 3 : Ecart relatif du prix par rapport au strike en pourcentage de S_0

On remarque que dans le cas d'un Call, l'écart croît avec K/S_0 de manière convexe et est significatif. Cela est cohérent avec la structure non linéaire de l'option. Lorsque l'option est deep in the money (faibles valeurs de K), la relation entre le prix de l'option et le sous-jacent est linéaire. Le prix de l'option est donc peu sensible à la volatilité du sous-jacent. L'incertitude sur la volatilité a alors moins d'importance et l'écart semble converger vers zéro. Lorsque l'option est deep out of the money (valeurs de K élevées), la relation est profondément non linéaire. Les valeurs faibles de C_m qui convergent vers zéro bien plus rapidement que le prix flou vont accroître l'écart relatif. Les petits sursauts que l'on rencontre dans la zone non linéaire, sont liés aux imperfections d'un arbre binomial (à chaque annulation du payoff d'un nœud). De plus, une diminution de ρ entrainera un aplatissement de la courbe. Enfin une diminution de la volatilité va augmenter la zone où C_l et C_m sont faibles comparativement à C_r et augmenter ainsi les écarts dans la zone non linéaire.

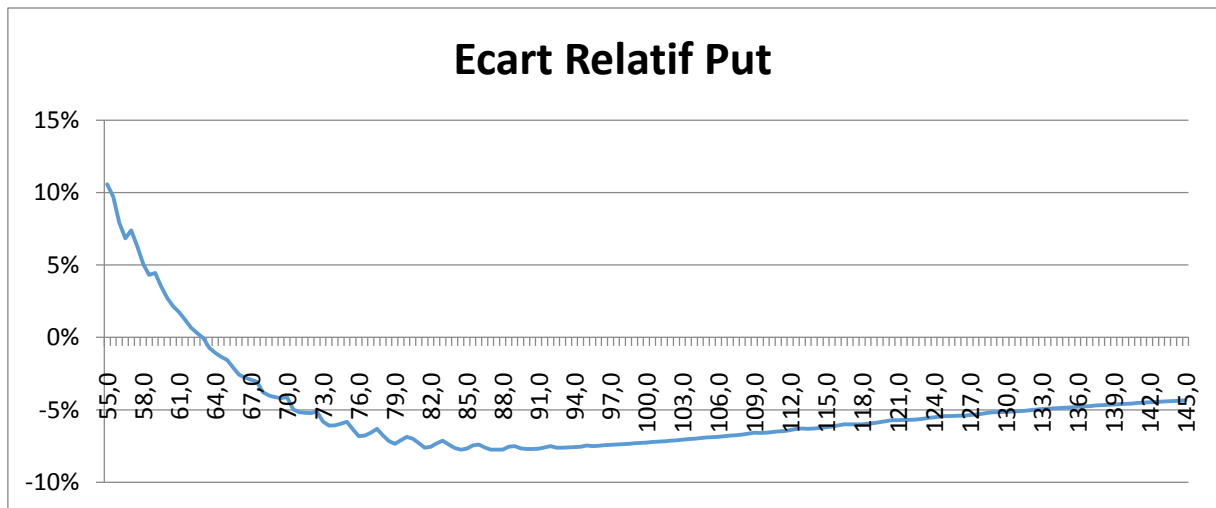


Figure 4 : Ecart relatif du prix par rapport au strike en pourcentage de S0

Pour les Puts, un premier régime existe où le prix décroît avec le strike (région deep out of the money). En effet dans cette zone, les faibles valeurs du prix PI et du prix de référence P_m^4 font porter le prix flou par P_r . Au fur et à mesure où P_m croît (avec PI négligeable), l'écart diminue et finit par devenir négatif. Enfin, un deuxième régime existe lorsque PI devient suffisamment grand. L'amplitude de l'écart diminue alors et tend à converger. A noter que ce phénomène peut aussi se produire pour les Calls si $R_r - R_m$ est inférieur à $R_m - R_l$.

III.d Impact de la méthode sur le risque d'une option

Nous regardons ci-dessous l'impact de cette méthode sur des indicateurs de risque. Nous prenons ici l'exemple d'un portefeuille constitué d'un Call (Put) en position courte.

La VaR a été simulée via une approche delta gamma où l'on considère la VaR de notre option comme une fonction de la VaR du sous-jacent (soit le CAC 40 dans notre cas). Pour plus d'information, nous renvoyons le lecteur vers [2].

$$VaR_{option} = \Delta VaR_S + 0.5 \Gamma VaR_S^2$$

Nous avons gardé les mêmes paramètres que pour le calcul du prix d'une option, à savoir une volatilité implicite. Or pour un calcul exact, si tant est qu'il y en ait un, il aurait fallu prendre une volatilité réelle (type GARCH) pour refléter au mieux les pertes possibles sur la valeur du sous-jacent. En effet, nous ne cherchons pas ici à retrouver les prix du marché mais à ce que notre valeur reflète bien les flux futurs actualisés.

⁴ NE PAS CONFONDRE AVEC LA PROBABILITE.

	Call	Put
Ecart Relatif VaR 99%	7%	-3%
Ecart Relatif ES 97,5%	5%	-3%
Ecart Relatif RM ES 97,5%	-19%	38%

Les valeurs ci-dessus représentent l'écart relatif de la valeur floue par rapport à une valeur classique définie par les paramètres « m ».⁵

Ainsi, notre modèle flou va rapprocher la valeur de référence du pire des cas pour les Calls et va agir en sens contraire pour les Puts. Le signe négatif pour la VaR et l'ES sur les Puts est dû à la faible valeur de RI.

Enfin, nous analysons ci-dessous le risque de modèle sur un Expected Shortfall à 97.5% par rapport à K/S0.

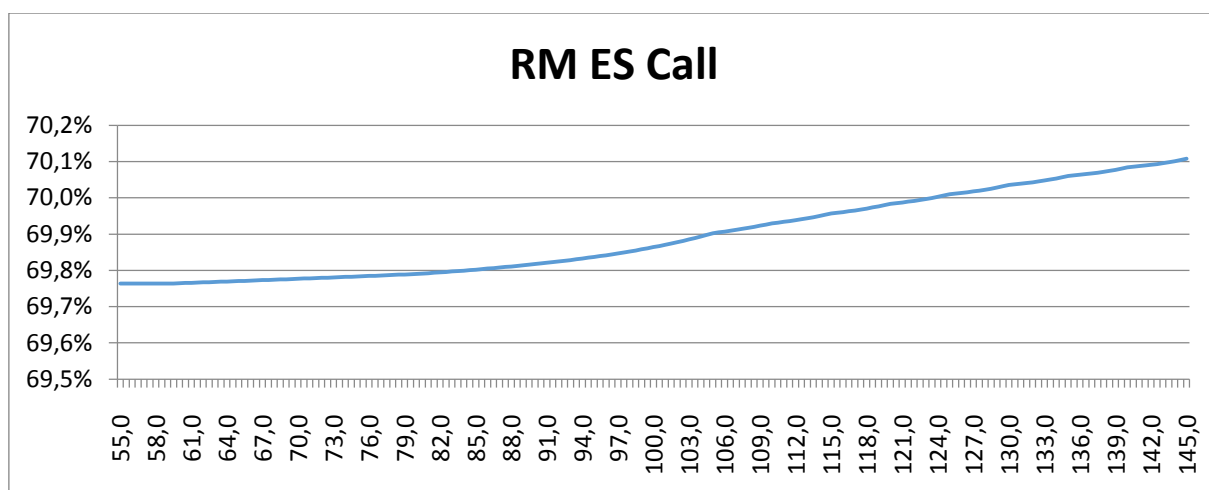


Figure 5 : RM de l'ES par rapport au strike en pourcentage de S0 pour un Call classique

⁵ $\left(\frac{R_{flou}}{R_{classique}} - 1 \right)$

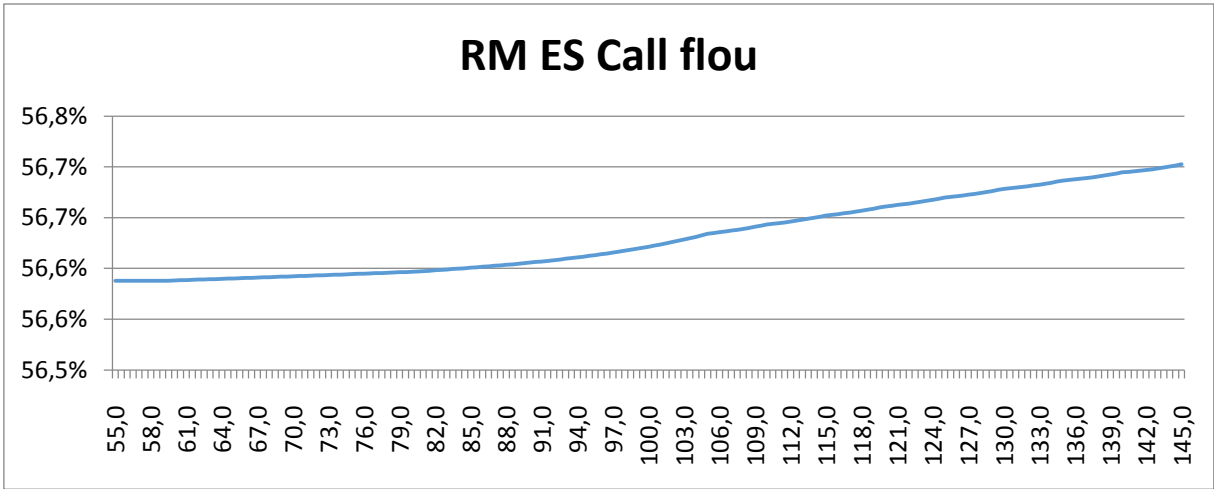


Figure 6 : RM de l'ES par rapport au strike en pourcentage de S0 pour un Call flou

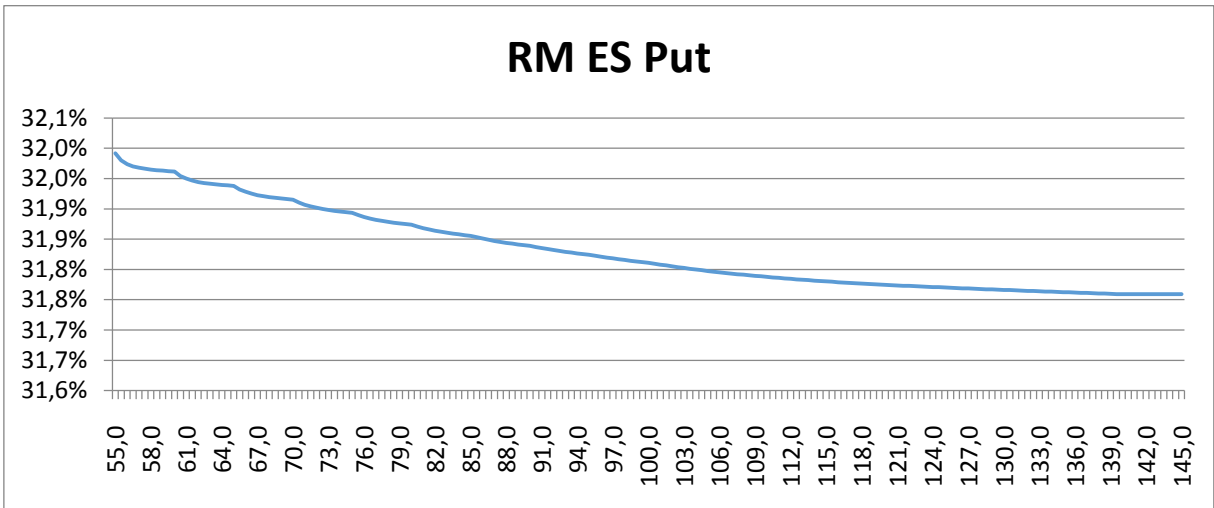


Figure 7 : RM de l'ES par rapport au strike en pourcentage de S0 pour un Put classique

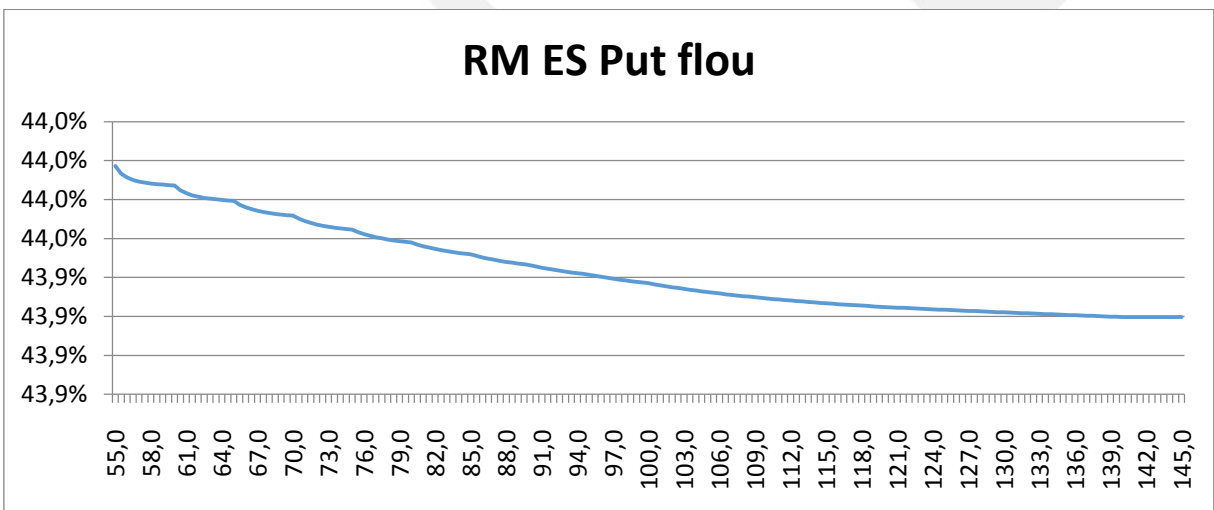


Figure 8 : RM de l'ES par rapport au strike en pourcentage de S0 pour un Put flou

Il est intéressant de noter que ces indicateurs dépendent de la moneyness uniquement à travers les sensibilités. Or, l'impact de la convexité étant faible dans notre étude, il en résulte que les écarts ne varient que très faiblement par rapport à la moneyness (simplification du delta présent au numérateur et au dénominateur).

Pour conclure, nous observons que le risque de modèle croît faiblement lorsque l'on s'approche de la zone de non linéarité pour les Calls. Ceci est dû à la convexité traduite par le rapport entre gamma et delta. Enfin, notre modèle flou va rapprocher RM de 50% pour les Puts et les Calls contrairement au modèle classique.

Tous les résultats sont disponibles dans le module Excel mis à disposition. De plus, vous trouverez en annexe la construction de l'arbre flou pour un Call et un Put de strike 110%, avec un pas de un an.

IV CONCLUSION

Ainsi, au travers de la calibration de ρ, σ et R_f , nous avons proposé une méthode d'évaluation d'options en présence d'incertitude sur les paramètres du modèle. De plus, une méthode delta-gamma sur CRR a été proposée pour le calcul de l'ES.

Pour aller plus loin, il faudrait prendre en compte trois structures par terme des taux. Une fortement possible et deux résultantes de la première choquée. De plus, nous avons calibré notre étude avec un intervalle de volatilité symétrique et constant. Pour rendre l'étude plus concrète, il faudrait travailler avec des valeurs extrêmes dépendantes du temps. Cela peut se faire en faisant intervenir d'autres paramètres dynamiques comme les taux et considérer que l'erreur de mesure dépend de cette dernière $[\sigma(1 - \rho_-(t, r(t)), \sigma(1 + \rho_+(t, r(t)))]$. Un moyen encore plus rigoureux de profiter de la logique floue est d'avoir autant d'estimation de la volatilité que de régimes (trois dans notre exemple). Les modèles devront cependant être mixés dans le cas d'une incertitude sur le régime. Pour en savoir davantage sur ce qu'on appelle les opérateurs flous, je vous invite à consulter l'article [4].

A noter que d'autres modèles comme la Constant Elasticity of Variance Diffusion ou les modèles à volatilité stochastique permettent de corriger l'hypothèse de volatilité constante. Cependant, ces derniers sont beaucoup plus couteux en temps de calcul et en maintenance. En effet, les arbres binomiaux ont l'énorme avantage d'avoir un temps de calcul très court. Cependant, le plus grand défaut de la logique floue reste, selon nous, le trop grand degré de liberté sur le choix du modèle. Un modèle hybride faisant appel au réseau de neurone, permet de corriger en partie ce problème à travers des méthodes d'apprentissage automatiques.

De plus, le lecteur intéressé pourra se renseigner sur les notions de Réseau Bayésien et Modèle de Markov caché qui permettent aussi de traiter de problèmes similaires.

Pour finir, rappelons que dans la pratique, le bon prix d'un instrument liquide comme les options, est celui pour lequel quelqu'un est prêt à vendre et un autre à acheter. Le souci de l'exactitude du prix est en soi plus une problématique de couverture et de risque de pertes futures qu'une nécessité de trading.

V ANNEXE

Pour des raisons d'esthétique, nous afficherons l'arbre fuzzy, dont chaque nœud est un triplet, en un ensemble de 3 arbres.

Pour un Call de strike 110% :

Fuzzy Parameters			
rho	8%		
Rl	-0,19%	ul	1,14
Rm	0,14%	um	1,15
Rh	1,95%	uh	1,16
Ph	53%	dl	0,88
Pm	47%	dm	0,87
Pl	46%	dh	0,86

Fuzzy Stock H

	0	1	2	3
3				156,61
2			134,86	116,13
1		116,13	100,00	86,11
0	100,00	86,11	74,15	63,85

Stock M

	0	1	2	3
3				151,58
2			131,96	114,87
1		114,87	100,00	87,05
0	100,00	87,05	75,78	65,97

Fuzzy Stock L

	0	1	2	3
3				146,71
2			129,11	113,63
1		113,63	100,00	88,01
0	100,00	88,01	77,45	68,16

Fuzzy Payoff H

	0	1	2	3
3				46,61
2			26,98	6,13
1		15,45	3,18	0,00
0	8,76	1,64	0,00	0,00

Payoff M

	0	1	2	3
3				41,58
2			22,11	4,87
1		11,59	2,29	0,00
0	6,01	1,07	0,00	0,00

Fuzzy Payoff L

	0	1	2	3
3				36,71
2			18,91	3,63
1		9,64	1,68	0,00
0	4,87	0,77	0,00	0,00

Pour un Put de strike 110% :

Fuzzy Parameters			
rho	8%		
Rl	-0,19%	ul	1,14
Rm	0,14%	um	1,15
Rh	1,95%	uh	1,16
Ph	46%	dl	0,88
Pm	47%	dm	0,87
Pl	54%	dh	0,86

Fuzzy Stock H

	0	1	2	3
3				156,61
2			134,86	116,13
1		116,13	100,00	86,11
0	100,00	86,11	74,15	63,85

Stock M

	0	1	2	3
3				151,58
2			131,96	114,87
1		114,87	100,00	87,05
0	100,00	87,05	75,78	65,97

Fuzzy Stock L

	0	1	2	3
3				146,71
2			129,11	113,63
1		113,63	100,00	88,01
0	100,00	88,01	77,45	68,16

Fuzzy Payoff H

	0	1	2	3
3				0,00
2			0,00	0,00
1		7,08	13,01	23,89
0	17,17	25,58	36,05	46,15

Payoff M

	0	1	2	3
3				0,00
2			0,00	0,00
1		6,42	12,14	22,95
0	15,56	23,72	34,07	44,03

Fuzzy Payoff L

	0	1	2	3
3				0,00
2			0,00	0,00
1		4,38	9,82	21,99
0	10,75	18,83	30,43	41,84

VI BIBLIOGRAPHIE

- [1] https://fr.wikipedia.org/wiki/Mod%C3%A8le_binomial
- [2] Glasserman, P., Heidelberger, P., & Shahabuddin, P. (2000). *Efficient Monte Carlo methods for value-at-risk*. IBM Thomas J. Watson Research Division.
- [3] Thiagarajah, K., Appadoo, S. S., & Thavaneswaran, A. (2007). Option valuation model with adaptive fuzzy numbers. *Computers & Mathematics with Applications*, 53(5), 831-841
- [4] <https://franck-dernoncourt.developpez.com/tutoriels/algo/introduction-logique-floue/>