

Allocation d'actifs à changement de régime

A. ZERRAD* & C. SPEC-DECHERCHI, 2015
(azerrad@nexialog.com & cspecdecherchi@nexialog.com)

Mots-clés : Asset allocation, Hidden Markov Switching, MCVaR, rebalancing.

Introduction

Les crises financières auxquelles nous avons été soumis dans les trente dernières années, suggèrent que les marchés financiers peuvent présenter plusieurs états dont les changements peuvent être extrêmement rapides. Un « changement de régime » peut se définir comme une rupture entre deux phases de marchés persistantes. Bien que certains changements puissent être transitoires, d'autres persistent souvent pendant de nombreuses périodes. Ces changements de régimes remettent largement en question les approches stratégiques d'allocation et exigent l'intégration d'une approche plus souple. De plus l'évolution, dépendante du temps, des primes de risque, de la volatilité et des corrélations des rendements financiers, ont des implications importantes en gestion de risque. Dès lors, comprendre ces comportements et, être en mesure de les anticiper est une condition préalable pour maîtriser son risque et générer de la performance.

Dans ce contexte, les modèles à changement de régime gagnent de plus en plus de place dans l'intérêt des investisseurs. Ils sont bien appropriés pour capter les faits stylisés des rendements financiers et offrent la possibilité de prédire, le plus rapidement possible et avec une crédibilité assez élevée, tout changement de régime. La mise en place d'un processus d'investissement dynamique ajusté en fonction des changements de régimes devrait en théorie surperformer les processus d'investissement stratégiques. Un tel processus consiste à modifier l'allocation initiale selon les régimes gouvernant les marchés financiers ; en période prospère, un investissement dans les actifs à haut rendements sera renforcé, alors que dans le cas contraire, la sécurité sera de mise avec un choix orienté vers les actifs peu risqués. L'objectif de cette étude est de vérifier si une telle approche permet effec-

tivement d'obtenir une meilleure performance à long terme.

Nous présentons les résultats sur un univers d'investissement[†] constitué de deux Stocks, deux Bonds et deux Commodities[‡], assez simple mais suffisant au niveau de la diversification. La période sous revue va du 31 mars 2000 jusqu'au 30 mars 2015, dont les treize premières années constituent l'échantillon *in-sample*, tandis que les deux dernières forment l'échantillon *out-of-sample*.

Dans la section suivante, nous présentons le cadre théorique des modèles à changement de régime. Nous analysons ensuite leurs capacités à bien reproduire les faits stylisés des rendements étudiés. Nous discutons après, de la performance d'une allocation stratégique qui servira de *benchmark* pour évaluer la performance de l'allocation dynamique présentée en section 4.

Cadre général des modèles à changement de régime

La principale caractéristique des modèles à changement de régime, connus dans la littérature sous le nom de *Hidden Markov Model (HMM)*, est la distribution des observations X_t , $t = 1, \dots, T$, qui sont déterminées par des états (régimes) inobservés S_t issues d'un processus markovien latent. Le comportement de la chaîne $S_t \in \{1, \dots, m\}$ est gouverné par une matrice de transition Γ . Pour un modèle à deux régimes, Γ prend la forme :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix},$$

où γ_{ij} est la probabilité de passer du régime i au régime j : $\gamma_{ij} = \mathbb{P}(S_t = j | S_{t-1} = i)$.

*. Ali Zerrad, Responsable du pôle R&D de Nexialog.

†. Les *tickers* Bloomberg de ces actifs sont dans l'ordre : NDUEACWF, SPTR, JHDCGBIG, IF98TRUU, SPGSCITR et USCRWTIC.

‡. Respectivement notés S1, S2, B1, B2, C1 et C2

La distribution conditionnelle p_j des observations X_t sachant les régimes est donnée par :

$$p_j(x_t, \theta_j) = \mathbb{P}(X_t \leq x_t | S_t = s_t),$$

dans le cas gaussien univarié, cette distribution devient :

$$X_t | S_t = \mu_{S_t} + \sigma_{S_t} \varepsilon_t,$$

où ε_t est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite, $\mu_{S_t} \in \{\mu_1, \mu_2\}$ et $\sigma_{S_t} \in \{\sigma_1, \sigma_2\}$.

La modélisation HMM implique nécessairement des temps de *sojourn* (d_j) § géométriques. d_j représente le temps passé par la chaîne sous le régime j . Cependant, cette modélisation géométrique des temps de *sojourn* peut s'avérer inappropriée dans bon nombre d'applications. Une manière d'y remédier est de considérer un modèle HSMM. Ce dernier est presque identique aux HMM à la différence près que les régimes sont gouvernés par une semi-chaîne de Markov. Ainsi, la distribution du temps de séjour peut être choisie explicitement. Afin d'estimer les paramètres δ , Γ et θ' ¶, nous faisons appel à l'algorithme EM (Espérance-Maximisation) qui s'inscrit dans le cadre général du maximum de vraisemblance; ce dernier permet d'obtenir une estimation même lorsque l'on est en présence de données manquantes ou cachées [Zucchini & MacDonald].

La vraisemblance « classique » d'un HMM est donnée par :

$$L_T = \delta P(x_1) \Gamma P(x_2) \Gamma P(x_3) \cdots \Gamma P(x_T) 1',$$

où, δ est la probabilité initiale de S_t , $1'$ le vecteur unitaire $(1, \dots, 1)$ et $P(X_t)$ la matrice diagonale composée des densités conditionnelles relatives aux régimes $1, \dots, m$

$$P(X_t) = \begin{pmatrix} p(X_t, \theta_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p(X_t, \theta_m) \end{pmatrix}.$$

Deux approches existent pour identifier les régimes cachés : localement en maximisant les probabilités $\mathbb{P}(S_t = j | \mathbf{X}^{(T)} = \mathbf{x}^{(T)})$ pour $t = 1, \dots, T$, ou globalement en utilisant l'algorithme de Viterbi. Ce dernier permet de maximiser la distribution de probabilité conditionnelle de la suite des états (S_1, \dots, S_T) sachant les observations (X_1, \dots, X_T) . Intuitivement, il y a une préférence pour l'algorithme de Viterbi car l'approche locale pourrait conduire à des régimes impossibles puisque elle ne prend pas en compte la matrice de transition.

1 Modèles à changement de régime et faits stylisés

L'accent est mis sur la modélisation de l'indice S1, comme les indices boursiers sont généralement les plus grands contributeurs au risque d'un portefeuille et que les marchés boursiers conduisent généralement l'économie. Différents modèles, à deux et à trois régimes, ont été testés en considérant différentes distributions conditionnelles. Ces modèles ont été comparés à l'aide de plusieurs critères statistiques et métiers : reproduction des autocorrélations, adéquation des moments, critères d'informations, tests d'ajustement aux distributions (in)conditionnelles, nombre de paramètres *etc.* L'ensemble des modèles testés a quasiment la même structure, cependant, le modèle HSMM ¶ gaussien à deux régimes avec un temps de séjour distribué selon une loi binomiale négative (noté $HSMM_{\mathcal{N}}^2$), semble fournir des résultats très satisfaisants. Les paramètres estimés du modèle retenu, à l'aide de l'algorithme EM, figurent dans le tableau 1. Le modèle résultant montre clairement la présence effective de deux régimes distincts, une faible volatilité associée à un rendement positif pour le premier régime, et une volatilité élevée associée à un rendement négatif pour le deuxième régime, indiquant que les périodes de turbulence sont généralement caractérisées par des rendements faibles en moyenne. Les deux régimes sont quasiment identifiés par leurs moyennes ainsi que par leurs variances. Cela est important puisque la différence des moyennes est une propriété indispensable pour reproduire l'autocorrélation d'ordre 1 ainsi que la *skewness*.

Régime	$\mu \times 10^{-4}$	$\sigma \times 10^{-3}$	r	p	π	δ
1	6,39	6,30	0,053	0,0083	0,63	1
2	-13,70	17,90	0,035	0,0214	0,37	0

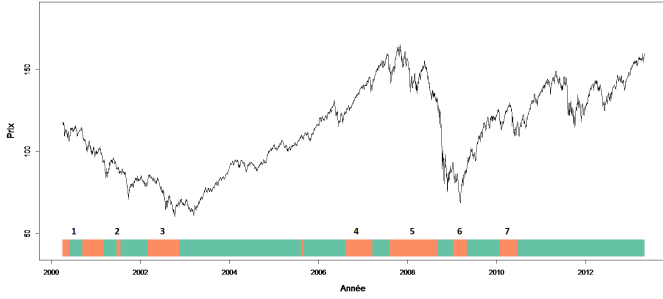
Tableau 1 – Paramètres de la modélisation $HSMM_{\mathcal{N}}^2$ (r et p sont les paramètres de la binomiale négative, π et δ représentent respectivement les probabilités stationnaires et les probabilités d'émission du processus markovien).

Le graphique 1 représente l'évolution de S1 au cours du temps, à laquelle les régimes identifiés ont été rajoutés. On peut par ailleurs noter la cohérence des régimes identifiés par rapport aux crises passées. Nous observons dans l'ordre (de 1 à 3) : la crise due à la *bulle internet*, celle du 11 septembre 2001 et la faillite de *WorldCom*. Ensuite, les numéros 4,5-6 et 7 sont respectivement dus à la crise des *subprimes*, la faillite de *Lehman Brothers* et la crise des états européens (Grèce, Portugal et Irlande). Sur cette seconde partie, on peut apprécier le retour à de bons comportements, en particulier grâce à la création de la *European Financial Stability Facility (EFSF)* en juin 2010, qui a redonné confiance aux investisseurs.

§. $\mathbb{P}(d_j = u) = \gamma_{jj}^{u-1} (1 - \gamma_{jj})$.

¶. θ' est le vecteurs des paramètres de la distribution conditionnelle des observations p_j .

||. Admet pour rappel un temps de séjour « paramétrisable ».



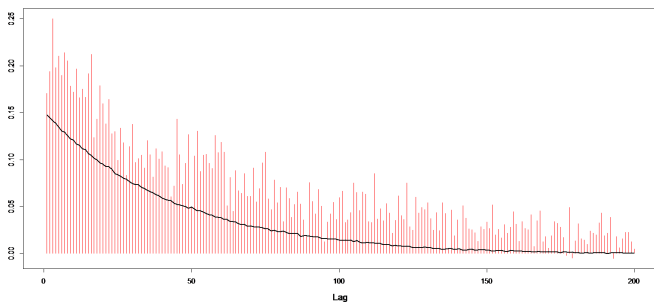
Graphique 1 – Prix journaliers de S1 avec l'état d'appartenance identifié à partir de Viterbi pour le modèle $HSMM^2_{\mathcal{N}}$; le régime 1 en bleu et le régime 2 en corail.

À ce stade, nous évaluons la capacité des modèles à changement de régime à rendre compte de quelques faits stylisés de l'indice étudié. Nous rappelons qu'on entend par les faits stylisés les propriétés statistiques communes à la plupart des actifs financiers (asymétrie négative, autocorrélation persistante de la valeur absolue (du carré) des rendements, clustering de volatilité...). Nous évaluons ainsi la capacité du modèle étudié à reproduire les moments (moyenne, volatilité, coefficient d'asymétrie (*skewness*), coefficient d'aplatissement (*kurtosis*)) ainsi que l'autocorrélation du carré des rendements. Le tableau 2 renseigne les moments empiriques des données étudiées et ceux théoriques basés sur les paramètres estimés du modèle $HSMM^2_{\mathcal{N}}$. Le modèle $HSMM^2_{\mathcal{N}}$ capture bien les deux premiers moments ainsi que la *skewness*, mais sous-estime légèrement le *kurtosis*.

	$\mu \times 10^{-5}$	$\sigma^2 \times 10^{-4}$	<i>skewness</i>	<i>kurtosis</i>
Données	9,06	1,18	-0,32	10,20
$HSMM^2_{\mathcal{N}}$	9,49	1.16	-0,25	6,39

Tableau 2 – Adéquation des moments théoriques $HSMM^2_{\mathcal{N}}$ avec les moments empiriques.

L'autocorrélogramme du carré des rendements empiriques, corrigés des valeurs aberrantes**, et celui du modèle étudié sont représentés par le graphique 2. Le modèle $HSMM^2_{\mathcal{N}}$ reproduit bien le comportement persistant du carré des rendements empiriques. Notons que nous avons considéré le carré des rendements comme les mesures robustes (valeur absolue, range, carré...) fournissent généralement de meilleures estimations de l'autocorrélation.



Graphique 2 – Autocorrélogramme des rendements au carré sans *outliers* et celui du modèle $HSMM^2_{\mathcal{N}}$ (en noir).

Les résultats obtenus sur l'ensemble des modèles testés montrent que la considération d'un régime supplémentaire permet un meilleur ajustement aux moments ainsi qu'aux autocorrélations empiriques. Cependant, augmenter le nombre de régimes conduit à des changements fréquents qui ne pourraient être dus qu'au bruit accompagné du nombre élevé des paramètres estimés. Les modèles à distributions conditionnelles à queues épaisses (*Student* par exemple) permettent quant à eux de bien reproduire le *kurtosis* élevé des données étudiées, mais conduisent à une sur-estimation des moyennes (le double) ainsi qu'à des autocorrélations (du carré des rendements) persistantes mais à un niveau plus faible. Tenant compte de l'ensemble des tests effectués, en plus des tests d'adéquation aux distributions conditionnelles, le modèle $HSMM^2_{\mathcal{N}}$ semble fournir des résultats satisfaisants.

2 Prédiction des régimes

L'objectif de l'allocation dynamique est de tirer profit des régimes économiques favorables tout en résistant à ceux moins favorables. Une telle allocation suppose d'avoir la souplesse nécessaire pour s'adapter à l'évolution des régimes économiques gouvernant l'univers d'investissement considéré. Ainsi, afin d'anticiper au mieux, tout changement de régime, il est nécessaire de se doter d'un modèle multivarié tenant compte de l'ensemble des actifs considérés. Les modèles multivariés sont également bien appropriés pour capter, en plus des faits stylisés discutés ci-haut, le comportement dépendant du temps de la structure de dépendance des rendements ; une propriété essentielle à prendre en compte dans les stratégies d'allocation d'actifs. En effet, la dépendance entre les instruments financiers a tendance à s'aggraver lors des périodes turbulentes, ce qui implique que supposer improprement une stabilité de la dépendance peut conduire à une sous-estimation significative de la survenance des rendements conjointement négatifs ([Sheikh & Quiaio (2010)]). Cependant, le nombre de paramètres élevé à estimer, lorsque la taille de l'univers d'investissement est conséquente, est généralement problématique et conduit parfois à des estimations moins robustes voire impossibles. [?], ont introduit une version allégée de la vraisemblance à maximiser utilisant des matrices de covariances conditionnelles diagonales. Cette hypothèse, quoi qu'elle parait forte, n'impacte en rien l'objectif final de la modélisation et permet d'obtenir des résultats aussi satisfaisants, en termes de prédiction des changements de régimes et de conservation du caractère dépendant du temps de la structure de dépendance, que l'approche originelle ([Zerrad A. (2015)]).

Dans le cas d'une modélisation multivariée, X_t est un K -vecteur de composantes X_{t_k} , la modification de la vraisemblance est alors effectuée en considérant le produit des probabilités conditionnelles des observations :

$$\mathbb{P}(X_t = x_t | S_t = j) = p(X_t, \theta_j) = \prod_{i=1}^K p_i(X_{t_i}, \theta_{j_i}).$$

** . Nous conservons uniquement les rendements appartenant à l'intervalle $[\bar{r}_t - 4\hat{\sigma}, \bar{r}_t + 4\hat{\sigma}]$ où \bar{r}_t et $\hat{\sigma}$ représentent la moyenne et l'écart-type empiriques.

Suivant cette approche, différentes distributions conditionnelles ont été testées, nous présentons en annexe A les paramètres estimés du modèle retenu $HMM_{pm,\mathcal{N}}^2$.

La prédiction des régimes passe par l'évaluation de la quantité $\mathbb{P}(S_{T+h} = i | \mathbf{X}^{(T)} = \mathbf{x}^{(T)})^{\dagger\dagger}$, dépendant des paramètres estimés du modèle retenu. Celle-ci renseigne la probabilité de survenance du régime i à l'instant $T + h$. Théoriquement, nous sommes en mesure d'anticiper des changements de régimes même pour des horizons infinis. Cependant, étant donné le caractère persistant du premier régime, nous optons pour une prédiction réévaluée quotidiennement. Ceci permettra d'éviter une « dégénérescence »^{‡‡} de la matrice Γ^h . [Bulla et al. (2010)] préconisent d'appliquer un filtre en considérant la valeur absolue de la médiane des 6 derniers régimes prédits. Ceci a pour objectif de limiter le nombre de *switching* et ainsi les coûts de transactions ; cette approche a été testée mais elle n'a pas fourni les résultats escomptés.

3 Allocation stratégique

L'allocation stratégique considérée servira de *benchmark* pour celle présentée dans la prochaine section. Nous optons pour une allocation *Mean Conditional Value-at-Risk (MCVAR)* par scénarios. Comparée à une approche *mean-variance* de *Markowitz*, celle-ci conduit à des allocations stables et efficaces, et ceci même lorsque l'univers d'investissement est constitué d'instruments présentant un caractère gaussien ou elliptique [Bertsimas et al. (2004)].

3.1 Construction des scénarios à changement de régime

Le pseudo-algorithme ci dessous permet de générer B scénarios de taille n , dont la structure de dépendance est statistiquement égale à celle des données historiques.

1. Pour $i = 1, \dots, B$, générer une chaîne de Markov MC_b à m régimes de taille n ;
2. Pour $i = 1, \dots, B$, générer des réalisations R_b de taille n , issues d'une modèle de mélange gaussien de paramètres μ_{MC_b} et Σ_{MC_b} ; Conserver R_b si le test de Bartlett^{§§} est concluant, sinon re-simuler R_b ;
3. Récupérer le vecteur $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_B)$.

En notant $n_j^{S_i}$ le temps pendant lequel la chaîne est présente à l'état i sachant qu'elle est entrée dans celui-ci à l'instant j , chaque chaîne de Markov MC_b peut être représentée en fonction de la suite des temps de séjour : $(n_j^{S_i})_{i \in \{1, \dots, m\}, 1 \leq j \leq n}$. Dès lors, R_b est une concaténation de réalisations de vecteurs gaussiens de paramètres $(\mu_{S_i}, \Sigma_{S_i})_{i \in \{1, \dots, m\}}$ de taille $(n_j^{S_i})$.

^{††}. $\mathbb{P}(S_{T+h} = i | \mathbf{X}^{(T)} = \mathbf{x}^{(T)}) = \frac{\alpha_T \Gamma^h}{L_T}$, où α est la probabilité *forward* dont les composantes sont : $\alpha_T(j) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_T = x_T, S_T = j)$.

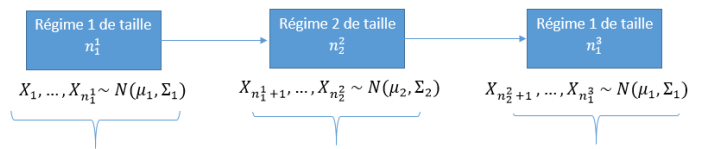
^{‡‡}. $\Gamma^h \underset{h \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

^{§§}. Pour plus de détails, se reporter à l'annexe B qui présente le test de Bartlett.

Plus précisément, les paramètres μ_{S_i} et σ_{S_i} sont extraits de la modélisation $HMM_{pm,\mathcal{N}}^m$. En notant A_{S_i} la matrice diagonale contenant les écarts-types σ_{S_i} et C_{S_i} la matrice de corrélations empirique, toutes deux relatives au régime S_i , Σ_{S_i} est construite comme suit :

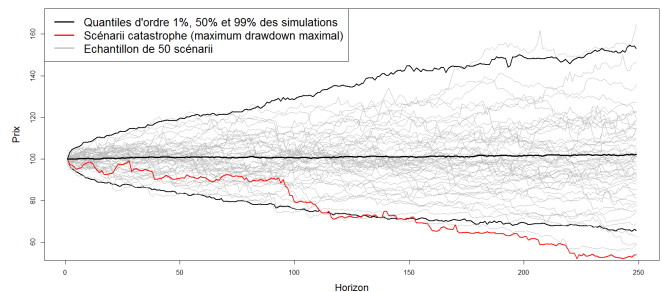
$$\Sigma_{S_i} = \sqrt{A_{S_i}} C_{S_i} \sqrt{A_{S_i}}.$$

Le graphique 3 représente une simulation sur un exemple à deux régimes, avec, de haut en bas la chaîne de Markov simulée et les réalisations associées.



Graphique 3 – Représentation d'une simulation pour une séquence contenant deux changements de régimes.

Sur le graphique 4, 50 simulations (parmi 9 999) de prix de S1 sont représentées, auxquelles sont associés les quantiles d'ordres, 1%, 50% et 99% ainsi que le plus pire scénario (au niveau du *Maximum-Drawdown*). On peut noter que les simulations forment une enveloppe (quantiles à 1% et 99%) qui est d'autant plus grosse que la volatilité de l'actif l'est.



Graphique 4 – 50 simulations de S1 accompagnées de différents quantiles (en noir) ainsi que le scénario qui maximise le *Maximum-Drawdown* (en rouge).

3.2 MCVaR

Le programme d'optimisation pour l'allocation stratégique est le suivant :

$$\begin{aligned}
& \min_{w,z,\gamma} \gamma + \frac{1}{(1-\alpha)^B} \sum_{i=1}^B z_i \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n \bar{r}_j w_j \geq ER \\
& \quad \quad z_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, B \\
& \quad \quad z_i \geq f(w, r^i) - \gamma, \quad i = 1, \dots, B \\
& \quad \quad w_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \\
& \quad \quad \sum_{j=1}^n w_j = 1
\end{aligned}$$

où B est le nombre de scénarios, $z_i = (f(w, r^i) - \gamma)^+$, $f(w, r^i) = -[r_1^i w_1 + \dots + r_n^i w_n]$ avec r_j^i le rendement annualisé relatif au scénario i de l'actif j et \bar{r}_j le rendement annualisé moyen, α le niveau de risque^{¶¶}, γ la Var à $\alpha\%$ et ER le rendement espéré.

Cette formulation de la $CVaR$, en fonction de la Var et de la moyenne des pertes au-delà de cette dernière, rend le problème d'optimisation linéaire et permet de gagner en temps de calcul. Notons que la vente à découvert n'est pas autorisée.

Trois portefeuilles de la frontière efficiente sont représentés dans le tableau 3. Ce tableau renseigne, en plus de leurs compositions, leurs performances, *in-sample*, en termes de rendement annualisé (RR), volatilité annualisée (SD), *Maximum-Drawdowns* (MDD) et ratio de Sharpe (SR). Notons que nous avons opté pour un *rebalancing* annuel afin de ne pas trop s'écarter de l'allocation initiale et, nous avons appliqué des coûts de transaction d'ordre 0,2% par 100% de *turnover*. Nous retenons le portefeuille P_1 comme *benchmark* pour l'allocation dynamique présentée dans la section suivante.

P	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
P_1	0	0	24,31%	74,83%	0	0,86%
P_2	0	0	0	87,54%	0	12,46%
P_3	0	0	0	76,61%	0	23,39%

P	ER $\times 10^{-2}$	CVaR $\times 10^{-4}$	RR $\times 10^{-2}$	SD $\times 10^{-2}$	MDD (%)	SR
P_1	7,5	8	7,2	3,8	26,57	1,09
P_2	8,8	46	7,1	6,7	42,10	0,61
P_3	9,2	110	6,4	9,4	46,24	0,35

Tableau 3 – Composition et indicateurs de performances sur la partie *in-sample* des portefeuilles issus de l'allocation MCVaR.

4 Allocation dynamique

Différents régimes financiers exigent différentes allocations. Partant de ce postulat, des inclinaisons (*tilts*) par rapport au portefeuille *benchmark* sont à mettre en place en fonction

¶¶. Ici, $\alpha = 5\%$.

***. À chaque rebalancement un coût de 0.2% par 100% de *turnover* est appliqué.

de l'information disponible sur chaque régime. Plus précisément, les *tilts* sont définis en cohérence avec le comportement de chaque actif dans chaque régime (déduit des paramètres estimés de la modélisation $HMM_{pm,\mathcal{N}}^2$); c'est-à-dire que le(s) actif(s) se comportant bien sous tel ou tel régime est(sont) privilégié(s) au détriment des autres et *vice versa*.

Afin d'approfondir l'analyse, et vue la composition pauvrement diversifiée ainsi que le caractère « ultra » défensif (99% de bond) du portefeuille P_1 , nous avons considéré d'autres *benchmarks* parcourant une large gamme de profils d'investisseur : très offensif, offensif, équilibré, défensif et très défensif.

Le tableau 4 informe sur les *tilts* effectués de manière générale.

Actifs	Benchmark W	Régime 1 W_1	Régime 2 W_2
S1	w_1	$w_1 + \alpha_1\%$	$w_1 - \alpha_2\%$
S2	w_2	$w_2 + \beta_1\%$	$w_2 - \beta_2$
B1	w_3	$w_3 - \gamma_1\%$	$w_3 + w_5 + w_6 + \gamma_2\%$
B2	w_4	w_4	$w_4 - \delta\%$
C1	w_5	$w_5 + \zeta\%$	$-w_5$
C2	w_6	w_6	$-w_6$

Tableau 4 – *Tilts* selon les régimes.

La stratégie d'allocation dynamique est ainsi définie comme suit :

- à l'instant initial t_0 , on investit dans W_i , avec i le régime prédit en $t_0 + 1$;
- tant qu'aucun changement de régime n'est détecté, le portefeuille reste inchangé ;
- lorsqu'un changement de régime est détecté, le portefeuille est rebalancé selon l'allocation définie pour un tel régime***.

4.1 Application au portefeuille P_1

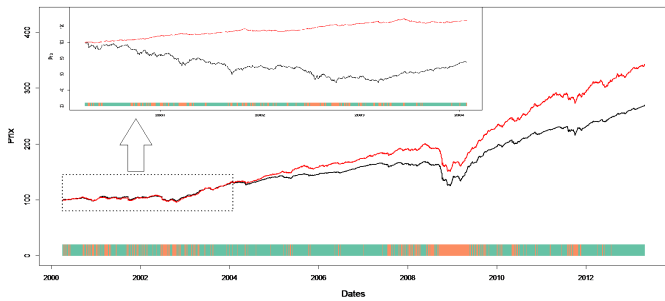
Les *tilts* appliqués au portefeuille P_1 sont présentés dans le tableau 5. Sur ce dernier seuls les paramètres non-nuls sont renseignés pour des raisons de lisibilité.

α_1	β_1	γ_1	γ_2	δ	ζ
5%	5%	15%	5%	5%	5%

Tableau 5 – Pénalisations de P_1 .

On peut observer sur le graphique 5 l'évolution du portefeuille issu de l'allocation dynamique (noté P_1^d) et de son *benchmark*. On observe sur ce dernier un temps d'attente avant que P_1^d performe P_1 . Cela s'explique par le fait que les Stocks admettent des rendements moyens négatifs sous le régime 1 (situation non représentée par les deux régime du modèle $HMM_{pm,\mathcal{N}}^2$) pendant la période sous-revue avec le zoom. Cela renvoie très certainement à la présence d'un troisième régime. On peut toutefois noter que la multitude

de changements de régimes apporte *in fine* un plus à P_1^d . Le lecteur intéressé trouvera en annexe C l'équivalent du graphique 5 sur la partie *out-of-sample*.



Graphique 5 – Évolution du prix des portefeuilles P_1 et P_1^d (respectivement en noir et en rouge) en fonction du temps et des régimes (régime 1 en bleu et régime 2 en corail) sur l'échantillon *in-sample*.

Le tableau 6 représente les performances des portefeuilles P_1 et P_1^d en *in* et *out-of-sample*. L'allocation dynamique performe clairement l'allocation stratégique, basée sur des rebalancements (vers les poids initiaux) annuels, avec un ratio de Sharpe net de frais de transaction, élevé et un *Maximum-Drawdowns* légèrement plus faible.

Data	P	$RR \times 10^{-2}$	$SD \times 10^{-3}$	$MDD(\%)$	SR
<i>in-sample</i>	P_1	7,4	380	25,90	1,14
<i>in-sample</i>	P_1^d	9,4	45	25,06	1,42
<i>out-of-sample</i>	P_1	3,6	25	4,68	0,24
<i>out-of-sample</i>	P_1^d	4,5	27	4,58	0,55

Tableau 6 – Indicateurs de performances des portefeuilles P_1 et P_1^d sur les échantillons *in-sample* et *out-of-time*.

4.2 Différents profils d'investisseurs

L'allocation *MCVaR* mise en place ici revêt un caractère « ultra-défensif » avec 99% de Bond. Ainsi, afin d'étendre et de généraliser les résultats obtenus dans la section précédente, nous étudions d'autres types de profils d'investisseurs : très offensif, offensif, équilibré, défensif et très défensif (tableau 7).

P	S1	S2	B1	B2	C1	C2
P_1^m très offensif	40%	40%	0%	0%	10%	10%
P_2^m offensif	35%	35%	10%	10%	5%	5%
P_3^m équilibré	25%	25%	20%	20%	5%	5%
P_4^m défensif	10%	10%	35%	35%	5%	5%
P_5^m très défensif	0%	0%	40%	40%	10%	10%

Tableau 7 – Proportions des actifs dans les différents portefeuilles P_i^m .

Les portefeuilles P_i^m ont été *tiltés* différemment les uns des autres suivant les valeurs du tableau 10 en annexe D. Cela est en particulier dû à l'interdiction de la vente à découvert. Nous ne présentons ici que les résultats relatifs à l'échantillon *out-of-sample* (le tableau 11, en annexe D représente les résultats sur l'échantillon *in-sample*). Le tableau 8 confirme la surperformance de l'allocation dynamique. Pour l'ensemble des portefeuilles considérés, cette dernière permet d'une part, des rendements réalisés ainsi que des ratios de Sharpe, supérieurs à ceux issus de l'allocation stratégique, et d'autre part, des *Maximum-Drawdowns* faibles.

P	$RR \times 10^{-2}$	$SD \times 10^{-2}$	$MDD(\%)$	SR
P_1^m	5,4	9,5	10,71	0,248
P_1^{md}	8,6	8,6	7,61	0,754
P_2^m	7,3	7,9	7,25	0,567
P_2^{md}	10	7,8	6,41	0,963
P_3^m	5,7	6,0	5,93	0,441
P_3^{md}	9,0	6,0	5,04	0,981
P_4^m	3,2	3,6	5,31	0,050
P_4^{md}	6,5	3,6	3,63	0,975
P_5^m	-1,2	3,8	9,56	-1,113
P_5^{md}	3,1	3,8	5,69	0,014

Tableau 8 – Indicateurs de performances des portefeuilles P_1 et P_1^d sur l'échantillon *out-of-time*.

Le graphique E en annexe E illustre ces résultats avec les évolutions des prix des portefeuilles P_i^m et P_i^{md} sur la partie *out-of-sample*.

5 Conclusion

La présente étude confirme que différents régimes économiques exigent différentes allocations d'actifs. Celle-ci part du principe que les portefeuilles gérés doivent être ajustés dynamiquement suite à l'arrivée de toute nouvelle information du marché.

Les analyses effectuées sur l'univers d'investissement montrent clairement la pertinence des modèles à changement de régimes à rendre compte des faits stylisés des rendements financiers, ainsi qu'à capturer les changements brusques de leurs comportements.

L'allocation dynamique mise en place, considérant que le marché est conduit par deux régimes, s'est avérée plus efficiente que les allocations stratégiques intégrant des *rebalancings* (périodiques). En effet, celle-ci affiche des rendements supérieurs au même titre que le ratio de Sharpe. D'autre part, les pertes maximales historiques sont significativement réduites. Cette sur-performance est d'autant plus significative que les changements de régimes du marché sont fréquents, ce qui met encore plus en exergue l'utilité d'une telle approche.

Pour aller plus loin dans cette étude, il serait intéressant de prendre en considération l'existence d'un troisième régime

économique, qui, statistiquement, est pleinement justifié. Il serait également intéressant de mener une étude approfondie sur les méthodes optimales de mise en place des *tilts*; une possibilité serait de définir des *tilts* à l'aide d'une optimisation numérique (et dynamique), au-delà d'une simple « vision investisseur ».

Références

- [Bertsimas et al. (2004)] Bertsimas D. & al., Shortfall as a Risk Measure : Properties, Optimization and Applications, *Journal of Economic Dynamics & Control* 28, 1353 – 1381, 2004.
- [Bulla & al. (2010)] Bulla & al., Markov-Switching Asset Allocation : Do Profitable Strategies Exist ?, *Journal of Asset Management*, vol. 12, 5, 310-321, 2011.
- [Bulla & Bulla (2006)] Bulla J.& Bulla I., Stylized Facts of Financial Time Series and Hidden Semi-Markov Models, *Computational Statistics & Data Analysis*, 51, 2192-2209, 2006.
- [Dahlquist & Harvey (2001)] Dahlquist M. & Harvey C.R., Global Tactical Asset Allocation, 2001.
- [Kritzman & al. (2012)] Kritzman M., Page S. & Turkington D., Regime Shifts : Implications for Dynamic Strategies, *Financial Analysts Journal*, Volume 68, Number 3, 2012.
- [Kritzman & al. (2010)] Kritzman M. & al. Principal Components as a Measure of Systemic Risk, *MIT Sloan Research Paper*, No. 4785-10, 2010.
- [Pola & Zerrad (2014)] Pola, G. & Zerrad, A., Entropy, Diversification, and the Inefficient Frontier, *Amundi Cross Asset Special Focus*, 2014.
- [Rockafellar & Uryasev (2000)] Rockafellar R.T., Uryasev S., Optimization of Conditional Value-at-Risk, *Journal of Risk*, 2, 21-41, 2002.
- [Rogers & Zhang (2011)] Rogers, L.C.G. & Zhang, L., An Asset Return Model Capturing Stylized Facts, *Mathematics and Financial Economics*, 5, 101-119, 2011.
- [Rydén (2008)] Rydén T., EM Versus Markov Chain Monte Carlo for Estimation of Hidden Markov Models : A Computational Perspective, *Bayesian Analysis*, 3, Number 4, p. 659-688, 2008.
- [Rydén & al. (1998)] Rydén T.& al., Stylized Facts of Daily Return Series and the Hidden Markov Model, *Journal of Applied Econometrics*, 13, 217-244, 1998
- [Sheikh & Quiaio (2010)] Sheikh A.Z. & Quiaio H., Non Normality of Market Returns : A Framework for Asset Allocation Decision Making, *Journal of Alternative Investments*, 12, 8-35, 2010.

[Zerrad A. (2015)] Zerrad A., Regime Switching Model : Une Approche « Pseudo » Multivariée, *Nexialog Consulting*, 2015.

[Zucchini & MacDonald] Zucchini M., MacDonald I. L., *Hidden Markov Models for Time Series- An Introduction Using R*, Chapman & Hall CRC Monographs on Statistics & Applied Probability, 2009.

A Modélisation $HMM_{pm, \mathcal{N}}^2$

Actifs	$\mu \times 10^{-4}$	$\sigma \times 10^{-3}$	<i>p-value</i>
S1	(7,15 -17,79)	(6,5 20)	(0,19 0,015)
S2	(6,27 -15,17)	(7,5 23)	(2 10^{-5} 0,25)
B2	(5,39 -3,98)	(1,25 6,1)	(2 10^{-9} 1,7 10^{-5})
C1	(9,91 -25,38)	(12 23)	(0,03 0,29)
C2	(1,65 -33,92)	(18 38)	(0,0079 0,109)
Processus markovien		π	δ
		(0,76 0,24)	(1 0)

Tableau 9 – Paramètres estimés du modèle $HMM_{pm, \mathcal{N}}^2$ sur le panier d'actifs.

B Test de Bartlett

Le test de Bartlett qui permet de tester l'homogénéité des matrices de variance-covariance. Ce test nous permet ici de tester si la structure de covariance des simulations est statistiquement égale à celle des données.

Soient Σ et Σ' deux matrices de covariances. Les hypothèses du test sont les suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : \Sigma = \Sigma' \\ H_1 : \Sigma \neq \Sigma' \end{cases}$$

Définissons $\hat{\Sigma}_p$ l'estimation non biaisée de la matrice de covariance intra-classe comme :

$$\hat{\Sigma}_p = \frac{\hat{\Sigma} + \hat{\Sigma}'}{2}$$

Alors, la statistique du test de Bartlett est la suivante :

$$\Psi = c(H-1) [2 \log \det(\hat{\Sigma}_p) - \log \det(\hat{\Sigma}) - \log \det(\hat{\Sigma}')]]$$

Où,

H est la taille de l'échantillon et c le coefficient correcteur suivant avec p le nombre de variables :

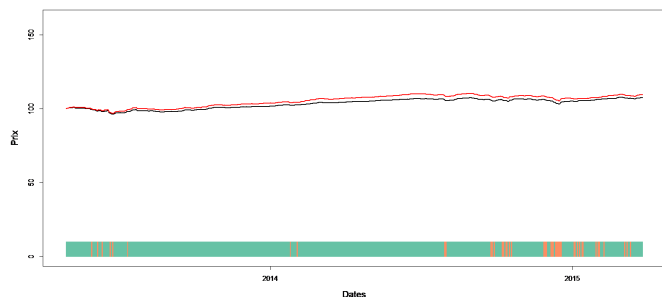
$$c = 1 - \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)} \left(\frac{2}{H-1} - \frac{1}{2(H-1)} \right)$$

Sous l'hypothèse nulle, la statistique du test de Bartlett suit une loi du χ^2 à ν degrés de liberté où $\nu = \frac{p(p+1)}{2}$.

Ainsi, l'hypothèse nulle sera rejetée si $\Psi > q_{\chi^2(\nu, 1-\alpha)}^{+++}$.

+++ $q_{\chi^2(\nu, 1-\alpha)}$ représente le quantile d'ordre $1-\alpha$ d'une loi du χ^2 à ν degrés de liberté

C Représentation de P_1 et P_1^d sur l'échantillon *out-of-sample*



Graphique 6 – Évolution du prix des portefeuilles P_1 et P_1^d (respectivement en noir et en rouge) au cours du temps et des régimes (régime 1 en bleu et régime 2 en corail) sur l'échantillon *out-of-time*.

D Composition et performances des portefeuilles P_i^m sur la partie *in-sample*

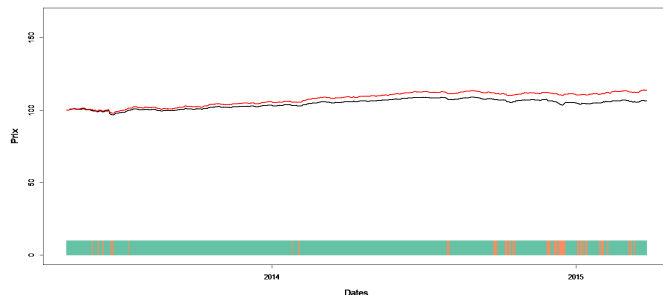
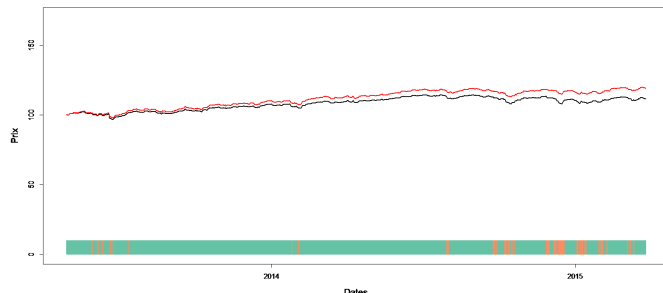
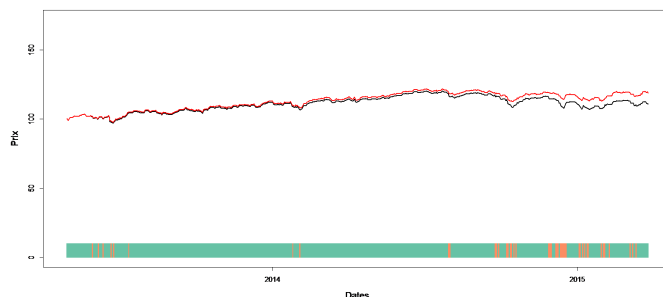
Paramètre	P_1^m	P_2^m	P_3^m	P_4^m	P_5^m
α_1	0%	5%	5%	5%	5%
α_2	5%	5%	5%	5%	0%
β_1	0%	5%	5%	5%	5%
β_2	5%	5%	5%	5%	0%
γ_1	0%	10%	10%	10%	10%
γ_2	15%	15%	15%	15%	5%
δ	5%	5%	5%	5%	5%
ζ	0%	0%	0%	0%	0%

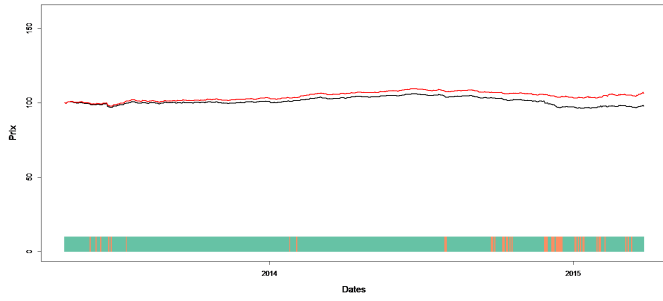
Tableau 10 – *Tilts* selon les régimes.

P	$RR \times 10^{-3}$	$SD \times 10^{-2}$	MDD(%)	SR
P_1^m	-1,5	17	62,07	-0,178
P_1^{md}	46	13	40,05	0,124
P_2^m	16	14	48,59	-0,101
P_2^{md}	46	12	37,15	0,128
P_3^m	34	10	39,13	0,042
P_3^{md}	63	8,7	28,10	0,370
P_4^m	55	5,6	27,94	0,452
P_4^{md}	83	4,5	15,49	1,163
P_5^m	62	6,6	31,40	0,479
P_5^{md}	97	4,9	12,61	1,368

Tableau 11 – Indicateurs de performances des portefeuilles P_i^m et P_i^{md} sur l'échantillon *in-sample*.

E Prix des portefeuilles sur la partie *out-of-sample*





Graphique 7 – Évolution du prix des portefeuilles P_i^m et P_i^{md} (respectivement en rouge et en noir) en fonction du temps et des régimes (régime 1 en bleu et régime 2 en corail) sur l'échantillon *out-of-sample*; de bas en haut $P_1^m, P_2^m, P_3^m, P_4^m$ et P_5^m